EUCLIDES

MAANDBLAD
VOOR DE DIDACTIEK VAN DE WISKUNDE

ORGAAN VAN
DE VERENIGINGEN WIMECOS EN LIWENAGEL
EN VAN DE WISKUNDE-WERKGROEP VAN DE W.V.O.

MET VASTE MEDEWERKING VAN VELE WISKUNDIGEN
IN BINNEN- EN BUITENLAND

43e JAARGANG 1967/1968

IV — 15 DECEMBER 1967

INHOUD

P. NOORDHOFF NV — GRONINGEN

Het tijdschrift **Euclides** verschijnt in tien afleveringen per jaar. Prijs per jaargang ƒ 8,75; voor hen die tevens geabonneerd zijn op het Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde is de prijs ƒ 7,50.

De leden van *Wimecos* krijgen *Euclides* toegezonden als officieel orgaan van hun vereniging. De contributie bedraagt f 9,00 (abonnement inbegrepen), over te schrijven naar postrekening 143917, ten name van Wimecos, Amsterdam. Het verenigingsjaar begint op 1 sept.

De leden van *Liwenagel* krijgen *Euclides* toegezonden voorzover ze de wens daartoe te kennen geven aan de Penningmeester van Liwenagel te Heemstede; postrekening 87185.

Hetzelfde geldt voor de leden van de *Wiskunde-werkgroep van de W.V.O.* Zij kunnen zich wenden tot de penningmeester van de Wiskunde-werkgroep W.V.O. te Haarlem; postrekening 261036 te Voorburg.

Indien geen opzegging heeft plaatsgehad en bij het aangaan van het abonnement niets naders is bepaald omtrent de termijn, wordt aangenomen, dat men het abonnement continueert.

Boeken ter bespreking en aankondiging aan Dr. W. A. M. Burgers te Wassenaar.

Artikelen ter opname aan Dr. Joh. H. Wansink te Arnhem.

Opgaven voor de „kalender" in het volgend nummer binnen drie dagen na het verschijnen van dit nummer in te zenden aan Drs. A. M. Koldijk, Joh. de Wittlaan 14 te Hoogezand.

Aan de schrijvers van artikelen worden gratis 25 afdrukken verstrekt, in het vel gedrukt; voor meer afdrukken overlegge men met de uitgever.

DE DISCUSSIE-NOTA'S

Gecombineerde ledenvergadering van Wimecos, Liwenagel en de WVO op 30 oktober 1967 in „Esplanade", Utrecht.

Om 10.37 uur opent de voorzitter, Dr. Ir. B. Groeneveld, de vergadering. Hij heet alle aanwezigen welkom, in het bijzonder de leden van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde en de forumleden.

Hij stelt de leden van het forum voor het vwo aan de vergadering voor: Dr. D. N. van der Neut (inspecteur), Dr. H. A. Gribnau (inspecteur), Prof. Dr. A. F. Monna (secretaris van de CMLW), Dr. P. G. J. Vredenduin, Drs. J. van Dormolen.

De voorzitter deelt mee, dat door secretarissen verslag van de besprekingen zal worden gemaakt en dat deze verslagen zo spoedig mogelijk zullen worden gepubliceerd in *„Euclides"*.

Voorzitter bedankt al degenen die schriftelijk vragen hebben ingediend. Hieronder zijn vragen die niet aan de orde zijn; voorzitter deelt mee, alle vragen over de urenverdeling te hebben geseponeerd. Andere moeilijke zaken die door de vragenstellers worden aangeroerd, zijn de wiskunde van het atheneum A en de differentiatie van het havo. De heer Gribnau zal een annulerende mededeling doen over het wiskundeprogramma van het atheneum A; vanmiddag zal wel gesproken werden over de differentiatie van het havo; voorzitter acht het verband hiervan met de discussienota's belangrijk genoeg om er aandacht aan te besteden. Voorzitter gaat vervolgens in op de aandrang die door briefschrijvers op Wimecos wordt uitgeoefend, een uitgave als de *„250 Opgaven"* voor het nieuwe leerplan te verzorgen. Als zijn persoonlijke mening geeft de voorzitter te kennen, dat Wimecos zich in principe distancieert van de vernieuwing van het leerplan: dáár is een staatscommissie voor; Wimecos kan op dit punt niet het initiatief nemen; natuurlijk kan overleg met de staatscommissie worden tot stand gebracht.

Voorzitter doet mededelingen over de gang van zaken: hij eigent zich het recht toe, ter handhaving van een goede tijdsverdeling, discussies te couperen; hij stelt voor, niet te discussiëren n.a.v. de bespreking van de schriftelijk ingediende vragen, en eerst na de behandeling van die vragen een soort rondvraag te houden. Hij wijst er op, dat volledige voorlezing van de binnengekomen brieven

te veel tijd zou roven; hij heeft elk van deze brieven samengevat. Forumleden hebben een copie van elke brief; hierdoor kunnen vragenstellers verzekerd zijn van antwoorden op de door hen gestelde vragen, ook als die vragen door de samenvatting niet geheel juist worden weergegeven.

Tenslotte biedt de voorzitter de excuses aan van de besturen van de organiserende verenigingen inzake de verzending van de circulaire waarin deze vergadering werd aangekondigd; de uitgever heeft gewerkt met verkeerde lijsten; door publikatie in de weekbladen en toezending van exemplaren naar de scholen hebben de besturen getracht alle belanghebbenden alsnog te bereiken.

Vragen en opmerkingen zijn binnengekomen van: Groep wiskundeleraren Arnhem (Drs. M. J. Steenhuis), groep wiskundeleraren Baarn (H. Brouwer), Menso Alting lyceum, Ichthuscollege, Christelijke School „Juliana van Stolberg", Drs. P. C. Fuhri Snethlage, G. Krooshof, J. G. A. Lendering, A. J. Poelman, L. Sevenster, R. Troelstra.

Voorzitter gaat over tot behandeling van de binnengekomen vragen betreffende het vwo (zie bijlage 1).

Om 12.35 uur schorst de voorzitter de vergadering, na de aanwezigen attent te hebben gemaakt op de formulieren voor de declaratie van reiskosten.

Om 14.02 heropent de voorzitter de vergadering. Hij herhaalt de 's morgens gedane mededelingen en stelt de leden van het forum voor de brugklasse aan de vergadering voor: Dr. D. N. van der Neut, Dr. P. G. J. Vredenduin, Drs. B. Westerhof (inspecteur) (zie bijlage 2).

15.05 uur. Theepauze.

15.35 uur. Voorzitter stelt de leden van het forum voor het havo aan de vergadering voor: D. Leujes, G. Krooshof, E. H. Schmidt en Drs. B. Westerhof (zie bijlage 3).

16.45 uur. De voorzitter geeft het woord aan Prof. Drs. F. van der Blij, waarnemend voorzitter van de CMLW. Spreker dankt de verenigingen voor het organiseren van deze bijeenkomst; hij spreekt een persoonlijk dankwoord tot the heer Groeneveld voor de wijze waarop hij deze vergadering heeft geleid. Tenslotte bedankt de heer Leujes, names Liwenagel en de WVO, het bestuur van Wimecos, speciaal de secretaris, voor diens aandeel in de organisatie van deze vergadering.

16.55 uur. De voorzitter sluit de vergadering.

BIJLAGE 1; rapporteurs: A. J. Th. Maassen en C. van Vliet

Eerste vraag: *betreft afbakening en detaillering van de leerstof. Wanneer kunnen we dit tegemoet zien? Kunnen er niet nauwkeurige richtlijnen verstrekt worden?*

Van der Neut: Dit is een vraag van algemene strekking, die de gehele discussienota bestrijkt. Er komen nieuwe onderwerpen. Toch ook klassieke onderwerpen, die zo mogelijk op een moderne wijze behandeld moeten worden. Misschien hebben we niet eens zoveel nieuwe stof nodig.

Wat de afbakening betreft: de nodige vrijheid zal moeten bestaan i.v.m. lopende experimenten. De commissie Leeman heeft vier experimenten lopen op middelbare scholen. Deze scholen wisselen regelmatig ervaringen uit. Hier blijkt hoe ver we kunnen komen. Het gaat er niet om de zaak op te schroeven, het gaat om de leerlingen. De wiskundige vorming moet, in het licht van deze tijd, van betekenis zijn, maar de leerlingen moeten het aan kunnen. De uiteindelijke afbakening en detaillering zal afhangen van leerboeken die zullen verschijnen, van examens die worden afgenomen, van allerlei ervaringen. We zullen dit met elkaar moeten doen. Na deze bespreking staat alles nog steeds niet vast. De „Commissie" wil niet dicteren, maar wil in samenwerking met uw verenigingen komen tot een verantwoord wiskundeprogramma.

Tweede vraag: *verzoek om een publikatie in de trant van de „250 opgaven" (ook voor niet-examenklassen).*

Prof. Monna: U hebt, mijnheer de voorzitter, als uw oordeel te kennen gegeven dat dit geen zaak zou zijn voor Wimecos. Ik weet niet of ik niet met u hierover van mening moet verschillen. Het ligt niet op de weg van de Commissie, zelf boeken te gaan schrijven: we willen in Nederland niet naar een staatspedagogiek. Het kan heel goed de taak zijn van Wimecos, aanleunend tegen de Commissie, een opgavenboekje te doen verschijnen. Het zal wel in de bedoeling van de Commissie liggen, geschriften te publiceren die het leerplan toelichten.

Voorzitter verklaart, namens Wimecos, zich bereid tot samenwerking met de Commissie.

Derde vraag: *Vrees voor te grote moeilijkheidsgraad en overlading. De stof is tè abstract. Van bovenaf bekijken van eigenschappen is moeilijk voor leerlingen. Was dit opzet of toeval? De voorgestelde behandeling van het irrationale getal is te moeilijk.*

Vredenduin: Het is wel gewenst, in het kader van de moderne ontwikkeling van de wiskunde en de toepassingen, dat we de stof wat abstracter en meer principieel behandelen. De grotere strengheid moet echter in dienst staan van een beter begrip. Dus graag abstractheid en graag strengheid, maar alleen voor zover dit didactische voordelen biedt. De discussienota schrijft niet voor hoe de stof behandeld moet worden. In een leerplan kan door de Staat alleen maar aan de leraren opgedragen worden, dat ze een bepaald onderwerp moeten behandelen, maar nooit hoe ze dit moeten doen. Het irrationale getal kunt u dus behandelen zoals u wilt. De voorgestelde behandeling is geenszins streng, maar trekt de touwtjes wat strakker aan, teneinde het verschil tussen rationaal en irrationaal duidelijk te maken. Verhoging van strengheid kan hier het inzicht bevorderen.

Voorzitter: Inderdaad, voorgestelde behandeling is geen verplichte behandeling.

Vierde vraag: *Is het programma voor atheneum A niet te zwaar?*

Gribnau: Inderdaad. Het probleem doet zich echter niet voor: in de nieuwe lessentabel zijn de verplichte wiskunde-uren voor het atheneum A geschrapt. Een leerling van het atheneum A kan als keuzevak nemen het vak wiskunde I van het atheneum B.

Voorzitter deelt mee, alle andere vragen over de wiskunde van het atheneum A te hebben geseponeerd.

Vijfde vraag Eerste deel: *Is het programma voor de onderbouw niet te abstract: „volledige inductie, injectie, surjectie, bijectie, equivalentierelaties, lineaire-transformaties, groep, affiene groep, gelijkvormigheidsgroep, isomorfie"?*

Prof. Monna: Ik proef de algemene vrees dat het programma te zwaar is. U bent misschien geschrokken van woorden als injectie en surjectie. Ik kan daar wel inkomen (ik gebruik ze zelf zelden). U moet niet denken, dat dit nu een uitgemaakte zaak is; u moet het niet te zwaar nemen. U moet er zelf inhoud aan geven en beoordelen wat wenselijk is en wat niet.

Vervolgens wijst prof. Monna er op dat oudere mathematici belast zijn door hun opleiding: wat je jong leert, neem je je hele leven mee; de ouderwetse manier waarop je de wiskunde hebt geleerd, raak je nooit helemaal kwijt. Hij spoort de vergadering aan de vrees voor wat abstract lijkt te overwinnen (zonder fervent alle modernismen aan te hangen) en de jonge generatie niet met dezelfde last te bezwaren waaronder de oudere generatie gebukt gaat. Hij

adstrueert zijn betoog met een vergelijking van de moderne opleiding van studenten met die van dertig jaar geleden. Prof. Monna nodigt alle aanwezigen uit hierover na te denken en zich erover uit te spreken, met de waarschuwing „wees niet te bang voor abstractie" voor ogen, en zonder te vergeten, dat de wiskunde nu eenmaal tendeert naar grotere abstractie.

Voorzitter merkt op, dat met dit antwoord op de vraag: is het niet te zwaar? ook de vraag: is het niet te veel? beantwoord is.

Tweede deel: *dit gaat ook over het te zwaar en te veel zijn van het programma van de onderbouw*: „$x^2 > p$, *volledige inductie, hoogtepunt van een driehoek als verzamelingsdoorsnede, ellips als beeld van cirkel bij lijnenvermenigvuldiging, eigenschappen van affiene figuren*".

Van Dormolen vindt persoonlijk dat „$x^2 > p$" thuishoort in de onderbouw; zeker voor wie de taal van de verzamelingen heeft geleerd, zijn zulke ongelijkheden niet te moeilijk.

„Hoogtepunt van een driehoek" wordt in de nota genoemd als toepassingsmogelijkheid van het verzamelingsbegrip in de meetkunde; de stelling dat een driehoek een hoogtepunt heeft, behandelen wij nu ook in de eerste klas.

Van Dormolen denkt dat wie „rijen" netjes wil behandelen, niet helemaal onder het begrip „volledige inductie" uitkomt; wie echter leerlingen van de derde klas opgaven laat maken waarbij zij zelfstandig deze bewijsvoering moeten geven, stelt hun volgens Van Dormolen te zware eisen. Wat betreft „ellips als beeld bij lijnvermenigvuldiging" en de eigenschappen van affiene figuren: laten we het proberen; als het te moeilijk blijkt te zijn, dan kunnen we op dit punt minder of zelfs niets doen. Van Dormolen spoort allen aan, niet al te bang te zijn voor wat òns moeilijk voorkomt.

Zesde vraag: *Te zwaar of te veel, maar nu voor de bovenbouw*: arc sin, arc cos, arc tg; *fysische toepassingen van de analyse*; *differentiaalvergelijkingen.*

Voorzitter: het komt in de vragen vaak neer op: het is te veel, het is te moeilijk.

Van der Neut: Wat stellen wij ons voor ogen met ons wiskundeonderwijs? Bij het kiezen van onderwerpen, vooral in de bovenbouw, moeten we ons afvragen wat die leerlingen, die naderhand de wiskunde nodig hebben bij de studie van andere vakken, op de middelbare school moeten hebben gehad om die studie met vrucht te kunnen beginnen. (Voor diegenen die wiskunde als hoofdvak kiezen,

komt het er op de middelbare school minder op aan welke onderwerpen ze nu wel of niet hebben gehad). Het aantal vakken, waarbij de wiskunde gebruikt wordt, breidt zich steeds meer uit.

Cyclometrische functies hebben eerstejaars studenten al gauw nodig. Op zichzelf is het begrip cyclometrische functie niet moeilijk. 't Gaat om begrip en eerste toepassing. Niet om uitvoerige behandeling. Dit geldt ook voor differentiaalvergelijkingen. Deze dus niet in de perfectie behandelen met allerlei oplossingsschema's. Ze moeten er iets van begrijpen, want ze hebben ook dit in het eerste jaar nodig. Fysische toepassingen van de analyse: nauwe samenwerking tussen wiskunde- en natuurkunde-leraren is geboden. Dit is niets nieuws, staat al in het programma van 1938. De differentiaalvergelijkingen komen uit de natuurkunde naar ons toe. Ik stel mij voor dat de natuurkunde-leraar toekomt aan het opstellen van de differentiaalvergelijking, en dat misschien in de wiskundeles hiermede verder geopereerd wordt.

Voorzitter: U hebt de onmisbaarheid van deze onderwerpen duidelijk naar voren gebracht. Wat uw pleidooi voor nauwe samenwerking tussen leraren in de exacte vakken betreft: ik hoop dat u dit niet te idealistisch ziet.

Zevende vraag: *Hoe moet bewezen worden dat* $\sqrt{2}$ *irrationaal is? Moet de stelling over de eenduidige priemfactor-ontbinding ook worden aangegeven? Hoeft* $\sqrt{a}\,.\,\sqrt{b} = \sqrt{ab}$ *voor* $a, b \geqq 0$ *niet bewezen te worden?*

Vredenduin: De vraag: hoe moet iets bewezen worden, is al beantwoord.

Vredenduin wijst er op dat het voorbereidend onderwijs een samenspel is van strenge en intuïtieve wiskunde. Wie bewijst dat $\sqrt{2}$ irrationaal is, zal de stelling van de eenduidige priemfactorontbinding van gehele getallen wel gebruiken. Die stelling wordt door de leerlingen intuïtief aanvaard. Het lijkt Vredenduin nuttig de leerlingen daar op te wijzen, het lijkt hem niet nuttig die stelling ook te bewijzen. Het antwoord dat Vredenduin op het laatste lid van de vraag geeft, luidt: „ja". Spreker denkt dat de vraagsteller misleid is door onregelmatigheden van de taal in de discussienota: soms wordt alleen een formule vermeld, op andere plaatsen staat „bewijs van een formule".

Achtste vraag: *Is het werkelijk de bedoeling dat in 4b verder gebouwd moet worden op de intuïtieve kennis der stereometrie uit de eerste klas? De leerlingen zullen deze kennis na drie jaar toch wel vergeten zijn.*

Van Dormolen: Ik dacht dat het de bedoeling was ook in de tweede en derde klas, als het zo te pas komt, eens uit het platte vlak te gaan. B.v. met coördinaten, of door eens een blok te beschouwen en daarin een driehoek of een vierhoek vast te leggen. We moeten proberen de scheiding tussen planimetrie en stereometrie zoveel mogelijk af te vlakken.

Negende vraag: *Deze vraag betreft de coördinatie van het wiskunde en het natuurkundeonderwijs:*
i: *De differentiaalrekening moet behandeld worden vóór de kerstvakantie van het voorlaatste schooljaar en de integraalrekening voor de paasvakantie van dat jaar.*
ii: *Is de behandeling van de volgende onderwerpen niet noodzakelijk: inwendig vectorprodukt, orthonormaal stelsel, isometrische transformaties, complexe coordinaten, uitwending vectorprodukt, vectoranalyse: begrippen divergentie, gradiënt en rotatie?*

Voorzitter merkt op dat i. al in het huidige programma een praktisch probleem is. Hij acht beantwoording van ii. belangrijker voor de bespreking van de discussienota.
Gribnau: Ik sluit me ad i. aan bij de woorden van de voorzitter en bij wat Van der Neut heeft gezegd over de samenwerking van mathematici en physici. Ad ii. merkt spreker op: ik heb het genoegen gehad het experiment „meetkunde met vectoren" in vierde en vijfde klassen hbs-B en vijfde en zesde klassen van gymnasium-β te begeleiden. Ik heb bij het begin van het experiment bij de leraren een zekere huiver waargenomen: zal dit bij de leerlingen wel aanslaan? Evenals vroeger onze zekerheid bij de behandeling van de Analytische Meetkunde haar invloed niet miste op de leerlingen, zo slaat onze huiver en onrust van nu over op onze leerlingen. Toen het experiment een half jaar oud was, bleek de mening van de leraren wel wat gewijzigd: de zekerheid was bij de leraren — en dientengevolge ook bij de leerlingen — teruggekeerd; de leraren vonden de stof prettig; de stof bleek wel degelijk bij de leerlingen aan te slaan.

Spreker wijst op de grote samenwerking waarin het experiment resulteerde. Helaas kon het experiment niet volledig tot zijn recht komen: men begon er te laat mee; het experiment is niet tot een einde gekomen. Wil men op tijd aan in- en uitwendig product toekomen, dan moet men eerder beginnen. Op pag. 48 van de discussienota staat onder wiskunde II vermeld: „inleiding in de stereometrie". Hieronder dienen we alleen te verstaan „ de onderlinge ligging van punten, lijnen en vlakken"; hier is ruimte om tijdig aan de

lineaire algebra te beginnen. Aan het inwendig produkt kan men wellicht al in de vierde klas toekomen; het uitwending produkt zal later aan de orde worden gesteld. Het woord vectoranalyse wordt in het programma niet genoemd; spreker denkt dat daarvoor ook geen ruimte kan worden gevonden.

Tiende vraag: *Wat te doen met keuze-onderwerpen als een leerling van school verandert?*

Van der Neut: Eerst enkele opmerkingen over keuze-onderwerpen in het algemeen. Voor Wiskunde II als keuze-vak op de B-afdeling zijn drie uren uitgetrokken. In dit vak komt een tweede keuze-element, n.l. het keuze-onderwerp. De bedoeling van deze onderwerpen is niet, de leerlingen alvast iets te leren wat ze eigenlijk aan de universiteit moeten doen. Ze zijn bestemd voor leerlingen die er aardigheid in hebben, het aankunnen en het later nodig hebben. Tevens heeft de docent hier gelegenheid om één onderwerp op een wat hoger niveau te behandelen met goede leerlingen. Het is de bedoeling van de Commissie in de toekomst nog andere detaillering van elk dezer keuze-onderwerpen voor te stellen.

Wat nu te doen bij verandering van school? Twee mogelijkheden: a. leerling maakt eigen vak af, b. leerling stapt over op ander vak. Algemene richtlijn is hiervoor niet te geven.

Elfde vraag: *Dit is een vraag die niet aan de orde hoeft te komen. Hij wordt hier toch gesteld, omdat hij zonder twijfel de grote belangstelling heeft van de wiskundeleraren:*
Wat is de verwachting omtrent het aantal leerlingen die wiskunde II zullen kiezen?

Gribnau: leerlingen die naar een hogere technische school of naar een technische hogeschool gaan of van plan zijn aan de universiteit wis- en natuurkunde te gaan studeren, zullen er verstandig aan doen wiskunde II te kiezen. Een enquête onder de leerlingen heeft weinig zin. De verwachting van de Commissie is nog blanco. Het zou interessant zijn voor Wimecos na te gaan wat hierover het oordeel is van zijn leden.

Twaalfde vraag: *Blijft de Commissie Leeman voortbestaan?*

Prof. Monna: Bedoelt de vraagsteller nog vijf jaar, of nog tien jaar of nog langer? Ik zou kunnen zeggen: vraagt u het de minister, het is immers een staatscommissie. Graag zou ik de vergadering deze vraag terug willen geven: wat vindt u zelf? Een uitspraak van

deze vergadering zou ik zeker interessant vinden. Er is nog genoeg werk, b.v. richtlijnen over keuze-onderwerpen. Is het wenselijk dat er van de Commissie permanent stimulansen uitgaan? Persoonlijk acht ik het wel nuttig als er een soort informatiecentrum zou bestaan. De belangstelling voor de heroriënteringscursussen blijft groot. Moeten we dit blijven doen? 1200 ulo-leraren volgen dit jaar applicatiecursussen. 't Is nu niet bekend of de Commissie nog (lang) blijft voortbestaan.

De voorzitter deelt mee, dat de heer J. K. Timmer een concept heeft van een programma voor de brugklas. Exemplaren daarvan liggen ter tafel; aanwezigen wordt verzocht er een mee te nemen. Timmer zal gelegenheid worden gegeven in de middagvergadering het concept toe te lichten. Vervolgens peilt de voorzitter de mening van de vergadering over de noodzaak tot het voortbestaan van de activiteiten van de Commissie: (bijna) unanieme bevestiging van die noodzaak.

RONDVRAAG

Vier leden blijken over de nota's verder te willen discussiëren: De heren Broekman, drs. A. J. Westermann, drs. L. van den Brom (en J. K. Timmer).

Broekman: *Is het niet de bedoeling dat de boeken die nu gebruikt worden voor de experimenten, worden uitgegeven?*

Monna: in hun huidige vorm, als syllabus van de Commissie, zullen zij niet in de handel komen.

Gribnau: Deze syllabi zullen worden ingetrokken als de experimenten als geëindigd zullen worden beschouwd.

Hopelijk zijn er dan voldoende boeken op de markt.

Monna: Met dien verstande dat de Commissie zal kunnen blijven dienen als informatiecentrum waar influentie van kan uitgaan.

Van den Brom: i. *Is het niet interessant als de zaal ook eens de mening geeft over het al of niet voortbestaan van de heroriënteringscursussen?*

ii. *Er wordt steeds gesproken over modernisering van het leerplan. Is het niet minstens zo belangrijk dat ook het wiskunde-onderwijs wordt gemoderniseerd? Denkt de Commissie dat door dit leerplan het geleerde beter gaat functioneren? Waarom geen methodoloog, pedagoog en of psycholoog in de Commissie?*

iii. *De heer Van der Neut noemt onderwerpen die nodig zijn voor de universiteit. Op dit moment wordt in het eerste jaar geen rekening*

gehouden met behandelde stof op de middelbare school. Ik vind het een gevaarlijk standpunt de universiteit er te veel in te betrekken. Hoofdzaak moet zijn: welke denkmethode hebben ze nodig?

iv. *Het is gevaarlijk dat er zoveel hoogleraren in de Commissie zitten en het leraren-aspect er zo slecht vertegenwoordigd is.*

Voorzitter: i. Een stemming hierover lijkt mij overbodig.
Van der Neut: ii. Natuurlijk is er wel verschil tussen Onderwijs en Leerplan, al is er duidelijk samenhang. Als we over leerplan spreken, denken we aan datgene wat in een K.B. komt. Het zal misschien op de weg van de Commissie liggen meer aandacht aan methodiek en didaktiek te schenken.
Van den Brom: Denkt u dat met dit leerplan de leerstof al beter gaat functioneren? Het is toch een kwestie van methode?
Monna: Dit is een internationaal probleem. „Hoe wiskunde te geven opdat het gaat functioneren?" Hierop is nog nooit een antwoord gegeven.

iv. Het leraren-element is wel degelijk vertegenwoordigd in de Commissie. Bovendien hebben zeer vele leraren (naar schatting 200) inbreng via experimenten en besprekingen.
Vredenduin: De samenstelling van deze discussie-nota's is het werk van inspecteurs en leraren.

Westermann: *refereert aan het programma van de experimenterende scholen dat vermeld is in de nota over het Atheneumexperiment Rijksscholen 1965. Dit programma is aanmerkelijk beperkter dan het programma dat wij nù voor ons hebben*

i. *Zal daarmee rekening worden gehouden bij het eerste eindexamen?*

ii. *Voor het schrijven van leerboeken is meer houvast nodig inzake de begrenzing van de leerstof, dan ons nu geboden wordt.*
Op den duur moeten we toch af van aparte eindexamens per school.

iii. *Spreker vindt de opmerking van Van der Neut dat we nu op het gymnasium ook de moeilijkheden ondervinden van wisseling van school door leerlingen, weinig bevredigend.*
Dáár kwam de vraag juist vandaan.

Gribnau: ad (i): Zeer zeker!
Van der Neut: ad (iii): In de structuur van de nieuwe wet is de mogelijkheid geschapen daaraan taak-uren te besteden (rumoer in de vergadering).

Spreker kan zich voorstellen dat een goede leerling zelfstandig een onderwerp bestudeert, daarbij incidenteel gesteund door zijn nieuwe leraar.

Westermann: Ik heb geen antwoord op ii gekregen; dat interesseert mij het meest.
Voorzitter: Aan leerboekjes zijn al veel woorden besteed. Ik hoop dat u zult begrijpen, dat een precies antwoord in dit stadium niet kan worden gegeven.
Timmer: het genoemde rapport is van de Commissie-Hengelo. Het heeft in een der weekbladen gestaan. Ik zal u er straks meer van vertellen.

BIJLAGE 2; rapporteur: Dr. Th. J. Korthagen.

Eerste vraag: *Een programma kan onmogelijk gelijk luiden voor vwo, havo, mavo.*

Westerhof: „De vraag stamt van een experimenterende school, waar men reeds met mulo- en havo-leerlingen gewerkt heeft. De vraag is dan ook eigenlijk een stelling. De commissie die deze nota voor het brugjaar heeft samengesteld heeft toch gedeeltelijk willen werken in de richting van een gemeenschappelijk brugjaar, omdat dit een van de nieuwe zaken is, die in de mammoet-wet gestalte krijgen. We kennen de oude situatie dat er zelfstandige ulo-scholen bestaan naast lycea. Het woord lyceum wordt gebruikt om aan te geven, dat we wel gewend zijn aan de toekomstige samenwerking die gekarakteriseerd kan worden met het niveau havo enerzijds, vwo anderzijds, maar dat we op de een of andere wijze zullen moeten toegroeien naar een situatie waarbij leerlingen die t.z.t. havo, mavo of vwo kiezen toch een gemeenschappelijk jaar doormaken. In hoeverre dit gemeenschappelijke jaar op basis van de toegewezen uren, die voorgeschreven zullen zijn, gelijk van inhoud, diepgang en tempo zal zijn kunnen we op het ogenblik theoretisch alleen maar benaderen.

Ik ben van mening dat de opzet, zoals u die in de nota vindt sterk gericht is geweest op het vwo. Dat blijkt niet uit de nota. Dit komt omdat bij de correctie een klein woordje is weggevallen. In de toelichting op de brugklasnota staat dat dit een minimum programma is. De oorspronkelijke redactie luidde: een minimum programma voor het vwo. Misschien geeft u dit al wat lucht.

In hoeverre de mavo-school hier niet aan kan voldoen is nu niet te zeggen. We moeten ernaar streven dat we qua onderwerpen zoveel mogelijk hetzelfde behandelen. Dan zal misschien het tempo toch oorzaak zijn dat we met de mavo-klas niet klaar komen, maar ik dacht dat dan een uitloop naar de tweede klas mogelijk was."

De voorzitter leest nu de zesde vraag op: *Het minimum programma is vrij veel, vooral voor mavo.*

De voorzitter meent dat de heer Westerhof ook op deze vraag voldoende antwoord heeft gegeven.

Tweede vraag: 1. *Overlading.* 2. *Niet direct beginnen met verzamemelingen.* 3. *Moet het begrip vereniging van verzamelingen wel ingevoerd worden?* 4. *Belang van g.g.d. en k.g.v.?* 5. *Merkwaardige produkten zijn antiek.* 6. *Ontbinding in factoren naar vierkantsvergelijkingen, dus uit de eerste klas.* 7. *De woorden „onbekende en veranderlijke".* 8. *Het invoeren van gebroken getallen is moeilijk.* 9. *Welk soort breuken zijn bedoeld? Rekenkundig of algebraïsch?* 10. *Doel van de meetkunde.* 11 *Waarom zwaartelijn wel en middelloodlijn niet?* 12, 13. *Hoek van twee lijnen onbelangrijk.* 14. *Afstand punt-lijn hogere klas.* 15. *Verzameling punten op gegeven afstand van een lijn overbodig.* 16. *Puntverzamelingen zijn te abstract.* 17, 18. *Merkwaardige lijnen pas daar waar ze functioneren.* 19, 20. *Hoogte van een driehoek pas bij oppervlakte. Koorde, boog, middelpuntshoek bij rotatie.* 21. *Lijnsymmetrie en puntsymmetrie pas bij de vierhoeken.*

Van der Neut. Ik weet dat de vraagsteller geen concreet antwoord verwacht. Er zou aan deze vragen, die stuk voor stuk belangrijk zijn een conferentie van enige dagen te wijden zijn. Het is van gewicht dat op deze punten de aandacht gevestigd wordt. Het wiskunde onderwijs in de brugklas is nog een probleem. Er moet, op de een of andere manier een introductie in de wiskunde worden gegeven, die zoveel mogelijk gelijk kan gaan voor de verschillende sectoren, vwo, havo, mavo met alle divergenties in capaciteiten en ambities van de leerlingen. Wanneer de vraagsteller nu een aantal concrete punten noemt, dan liggen deze allemaal in de sfeer van „tot hoever kun je komen, is het op dit moment relevant of moet het verschoven worden". De kwestie van de relevantie hangt sterk af van de aanpak. Als u een traditionele aanpak hebt dàn vallen een aantal onderwerpen weg, die bij een andere aanpak, b.v. met transformaties, zoals dat op het ogenblik in het experiment gebeurt, zomaar ineens zonder moeilijkheden voor de dag komen. Daar hebt u de moeilijkheid bij het opstellen van een leerplan want we kunnen niet een bepaalde methode voorschrijven. Het woord intuïtief b.v. zal waarschijnlijk niet in het leerplan terechtkomen want dat is de de aanduiding van een bepaalde methodiek en dat doet de minister niet. In het programma van 1958 heeft, in het voorstel van Wimecos gestaan „intuitieve inleiding in de meetkunde" en in het definitieve leerplan staat alleen „Inleiding in de meetkunde". Alleen al hier-

mee worden bepaalde vragen tegen een bepaalde achtergrond geplaatst.

Ik wil graag op een enkel punt nader ingaan. „We moeten niet direct beginnen met verzamelingen. Moet het begrip 'vereniging van verzamelingen' worden ingevoerd?". Hierover kan gezegd worden dat het symbool van de vereniging op blz. 15 ten onrechte is opgenomen. Het begrip 'vereniging' kan verschoven worden naar de tweede klas. Toch meen ik dat het van belang is, dat de verzamelings*taal* door de leerlingen snel geleerd wordt. Men moet onderscheid maken tussen verzamelings*taal* en verzamelings*leer*. Het is niet de bedoeling dat de leerlingen de verzamelings*leer* wordt bijgebracht, maar wel dat ze leren de verzamelings*taal* te gebruiken, juist omdat dit in allerlei delen van de wiskunde tot uitdrukking komt. Als b.v. gevraagd wordt: „Moeten g.g.d. en k.g.v. met zoveel woorden worden genoemd" dan zeg ik: Niet met zoveel woorden maar het is een prachtig voorbeeld hoe men de verzamelingen tepas kan brengen bij een begrip dat de leerlingen niet hebben, ze leren eenvoudig een kunstje, maar u kunt die woorden zo prachtig ontleden: grootste gemene deler, het grootste element van de doorsnede van de verzamelingen van de delers. Hetzelfde geldt voor het k.g.v. U kunt het begrip verzameling toelichten met voorbeelden uit de klas, deze dingen moeten dicht bij de leerlingen worden gebracht. Het is gebleken dat de leerlingen er even vreemd tegen aankijken maar dat ze er al spoedig aan gewend zijn. De ouders hebben er meer moeite mee! Een vroegtijdige introductie van deze termen en dan ook de toepassing daarvan is nuttig. Moet b.v. een punt getekend worden dat aan een aantal voorwaarden voldoet en u gebruikt het begrip doorsnede dan hebben we iets waar dit inderdaad gaat functioneren. En zo kunnen we door het hele wiskundeonderwijs dit begrip, dat zo fundamenteel is, gebruiken, wanneer we er maar tijdig mee beginnen. In Amerika begint men ermee op de lagere school in de eerste klas. Het moet dus met onze leerlingen van 12, 13 jaar ook mogelijk zijn.

Wanneer gevraagd wordt: Waarom de zwaartelijn wel en de middelloodlijn niet, dan zeg ik: Dat hangt ervan af hoe we de zaak in elkaar zetten. We geven er op dit moment hoogstens een paar suggesties over en dan is het mogelijk dat u de zwaartelijn later behandelt als u er meer over kunt leren. Dat geldt ook voor de afstand van een punt en een lijn.

In een vroeger stadium is een lijst opgesteld van begrippen waarvan we meenden dat de leerling er in de brugklas mee in kennis moet worden gebracht en we hebben vervolgens geprobeerd dit wat te

structureren. En nu mag u de indeling algebra, meetkunde, verzamelingen helemaal laten vervallen in de brugklas. Laten we ervan maken een samenhangend geheel, waarbij het intuïtieve, het aanschouwelijke element een belangrijke rol speelt, maar dit laatste mag u niet in het leerplan verwachten.

Ik weet dat ik niet alle vragen heb behandeld, maar ik dacht dat ik toch misschien een richting heb aangegeven waarin onze gedachten gaan en waarin deze belangrijke vragen stuk voor stuk aan de orde kunnen komen.

Derde vraag: *Het heeft weinig zin in de traditionele meetkunde de begrippen rotatie, spiegeling en translatie in te voeren.*
De leerlingen erop wijzen, dat de vermenigvuldiging van natuurlijke getallen uit de optelling afgeleid kan worden, maar dat dit niet gaat bij de breuken.

Vredenduin: Ik zou het kort kunnen maken door te zeggen dat ik het met de vraagsteller eens ben, maar dan is hij natuurlijk onvoldoende beantwoord. Het heeft inderdaad weinig zin in de traditionele meetkunde rotatie, spiegeling en translatie in te voeren maar dat is ook niet de bedoeling, de bedoeling is dat we het meetkunde-onderwijs ook moderniseren. Waarom willen we nu bij deze modernisering die rotatie, spiegeling en translatie, in het algemeen de transformaties, een rol laten spelen? Een reden is, dat we dat in de brugklas al geschikt kunnen doen, dat juist deze bewerkingen direct aansluiten bij de meetkundige intuitie van de leerlingen. In de brugklas kunnen we de leerlingen iets laten doen met spiegeling, translatie en rotatie en waarschijnlijk veel beter iets daarmee laten opereren dan, zoals we dit tegenwoordig doen, van a tot z de congruentie uit te buiten.

Bovendien leveren die rotatie, spiegeling en translatie en speciaal de spiegeling uitstekende bewijsmethoden die intuïtief aanspreken, denkt u maar aan de puntsymmetrie. Als u die wilt gebruiken bij het tot stand brengen van de eigenschappen van het parallellogram is u snel klaar. Als u de lijnsymmetrie wilt gebruiken bij het tot stand brengen van de eigenschappen van de ruit is u snel klaar. Ook bij de vlieger is u snel klaar. Dus heeft men een gemakkelijker behandeling van de meetkunde, die beter aansluit bij de intuïtie.

Nu de voortzetting van het onderwijs. Zijn deze transformaties een goede voorbereiding voor wat er in latere leerjaren gebeurt? Ik dacht van wel, want deze transformaties spelen weer een rol bij de gelijkstandigheid, gelijkvormigheid, misschien zelfs bij de affiniteit

In ieder geval is het de bedoeling dat deze transformaties ook bij het verdere onderwijs een rol zullen blijven spelen. Men ziet dan bovendien de algebra en meetkunde naar elkaar toegroeien want de transformatie in de meetkunde is niets anders dan de functie in de algebra.

En tot slot, gaat men nog verder en kiest men Wiskunde II dan spelen de transformaties uit een hoger standpunt, weer een rol en is het goed dat de rol die ze daar spelen voorbereid is door een voorkennis die men er al van heeft

Wat de tweede vraag betreft wil ik zeggen: akkoord.

Vierde vraag: *De gewone techniek van de algebra is belangrijk.*

Van der Neut: Ik beaam dit van ganser harte, inderdaad, de gewone techniek is belangrijk en we zullen bij de modernisering niet mogen vergeten dat onze leerlingen de gewone handgrepen moeten leren. Ik weet niet of het u bekend is, dat in Amerika, waar men bepaalde experimenten al jaren doet op een gegeven moment oppositie gekomen is omdat men meende dat de leerlingen de eenvoudigste dingen niet meer konden. Er bestaat een grapje over een leerling die de wiskunde modern, volgens Papy had geleerd en die op de vraag: 'Hoeveel is zeven maal negen' antwoordde: 'Dat weet ik niet maar ik weet wel dat het gelijk is aan negen maal zeven'. De handgrepen zijn belangrijk, maar voor een ding moeten we oppassen, het doel van het wiskundeonderwijs is niet het maken van vraagstukken. Dat moet middel blijven. Het doel is om het wiskundig denken, ook in de brugklas te ontwikkelen. En als we dit voor ogen houden, dan wordt de techniek daarbij een hulpmiddel.

Vijfde vraag: *Het programma bekorten of met rationele getallen of met lineaire ongelijkheden en evenredigheden.*

Westerhof: Het motief is in wezen om te komen tot een bekorting van het programma. Daarmee wil de vraagsteller tot uitdrukking brengen dat het programma voor de brugklas dat voor u ligt op enigerlei wijze voor hem te zwaar is. Of deze bekorting nu moet gebeuren door het verschuiven van de rationale getallen naar de tweede klas en/of met de lineaire ongelijkheden en evenredigheden, waag ik op dit moment te betwijfelen omdat ik van mening ben dat deze onderwerpen wel in de eerste klas (laten we ons beperken tot de eerste klas havo-vwo) op hun plaats zijn. Op het ogenblik worden in het eerste leerjaar ook breuken behandeld.

De nieuwigheid in dit programma, n.l. dat er lineaire ongelijkheden naar voren worden gebracht kunt u zien tegen de achter-

grond van de gedachte dat, met een opzet van verzamelingen, de taal der verzamelingen sprekend en na de invoering van de verzameling der natuurlijke getallen en de verzameling der gehele getallen, dat daarbij eigenlijk in die verzamelingen telkens, héél eenvoudig voorbeelden en vraagstukjes betreffende de vergelijkingen en ongelijkheden tezamen behandeld kunnen worden. U moet er ook niet in zien het bijbrengen van de techniek van het oplossen van een algemene lineaire ongelijkheid van de vorm $3x+8 > 2x+5$, maar wel ongelijkheden als $x+5 > 8$, waarbij het oefenen in het gebruik van de getallenlijn een belangrijke rol speelt.

Ik geloof dat het invoeren van deze onderwerpen, mits dit niet geschiedt tegen de achtergrond van de behandeling van deze onderwerpen in de huidige situatie, want dan ben ik het volkomen eens, dan hebben we een veel te overladen programma, maar wanneer we de verzamelingen uitbreiden tot en met de rationale getallen in de eerste klas en wanneer we van meet af aan de lineaire vergelijkingen en ongelijkheden van heel eenvoudige aard zo successievelijk door de verschillende verzamelingen, die we behandelen, heenstrooien, dan geloof ik dat we op deze wijze toch bereiken dat deze zaken, niet op de huidige wijze, maar wel op een didactisch verantwoorde manier worden geïntroduceerd in het nieuwe programma.

Zevende vraag: *Het meetkundeprogramma is te zwaar voor havo, mavo. Commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen zijn alleen van belang als voorbeelden kunnen worden gegeven waarbij die regels niet opgaan.*
De meetkunde het hele jaar intuïtief behandelen. De nota moet expliciet wijzen op de ontwikkeling van de wiskundige denkwijze.
Nauwkeurig omschrijven wat bedoeld wordt met breuken.

Vredenduin: Laat ik beginnen met het voorstel de meetkunde het gehele jaar intuïtief te geven. Ik geloof dat we onderscheid moeten maken tussen het meetkunde onderwijs in een havo-mavo-brugklas en in een havo-vwo-brugklas. Het komt me voor dat in een havo-mavo-brugklas de meetkunde het hele jaar intuïtief moet worden gegeven, dat men echter in de havo-vwo-brugklas teveel tijd verdoet als men het alleen maar intuïtief doet en dat hier de intuïtieve inleiding in dienst moet staan van een zo snel mogelijk de leerlingen voorbereiden op de bewijzende, op de deductieve denkwijze, die hij zich later eigen zal moeten maken. Bij de havo-vwo zal men dus de intuïtieve inleiding krijgen die b.v. halverwege de cursus langzaam aan overgaat in de deductieve methode. Nu durf

ik niet te zeggen wat te zwaar is voor de havo-mavo-brugklas, dat weet ik niet.

De tweede kwestie betreft de formele zijde, de commutatieve associatieve en distributieve eigenschappen. U kunt dit op twee manieren opvatten. U kunt dit opvatten dat deze termen genoemd zijn om de leerlingen al snel in aanraking te brengen met algemene eigenschappen van relaties. Bij deze opvatting moet men inderdaad tegenvoorbeelden geven om het belang van commutativiteit naar voren te brengen. Men maakt dan het onderwijs in de brugklas waarschijnlijk te abstract. Toch voel ik veel voor deze eigenschappen en wel om de volgende reden. Het is belangrijk dat men de leerlingen in het stadium dat ze met letters gaan rekenen, wat voor hen iets heel anders is dan het rekenen met getallen, bewust laat worden welke eigenschappen ze altijd toegepast hebben bij het rekenen. Dat men bij 3.5.7 de factoren door elkaar mag gooien is vanzelfsprekend, maar dat $a.3b = 3ab$, daar zit een drempel die telkens even overschreden moet worden. Het is dus van belang dat de leerlingen deze eigenschappen expliciet leren kennen, om ze met verstand te kunnen hanteren. Maar het staat ieder vrij er anders over te denken en tegenvoorbeelden te geven.

'Nauwkeurig omschrijven wat bedoeld wordt met breuken.' Ik geloof dat de discussie-nota geen duidelijk antwoord bevat op de vraag 'wat verwacht men van de invoering van het rationale getal'. Verwacht men dat de leerlingen nu, beter dan op de lagere school is gebeurd, leren begrijpen wat een rationaal getal is en hoe met rationale getallen gerekend wordt òf verwacht men dat hier een algebraïsche breukrekening met de bekende vormen $\frac{a}{a+b} + \frac{b}{a-b}$ etc. in het programma zal ingevoerd blijven. Ik dacht, dat de bedoeling was het eerste, in de brugklas rekenen met gebroken getallen en niet met gebroken algebraïsche vormen, daar is eenvoudig geen tijd voor. En dat niet alleen, we hebben aan dit laatste altijd veel te veel gedaan, veel meer dan we later echt nodig hadden.

Verder 'de nota moet expliciet wijzen op de ontwikkeling van de wiskundige denkwijze". Voor zover u dat een tekortkoming van de nota vindt, kan ons dat alleen maar spijten. Ik hoop dat dit expliciet wijzen op de ontwikkeling in de discussie vandaag beter naar voren is gekomen dan in de nota.

Voor de rondvraag melden zich zes sprekers, de heren J. K. Timmer, G. Krooshof, L. G. M. Muskens, R. Troelstra, B. A. Knip en J. H. Derks.

De heer Timmer vertelt over een commissie die in Hengelo tot

stand is gekomen en waarvan een sub-commissie een program voor het wiskunde onderwijs in de brugklas moet samenstellen. Het programma van deze sub-commissie is gepubliceerd in de verschillende bladen[1]). De grondgedachte van het programma is, dat het brugklasonderwijs een eenheid moet zijn, maar zó dat, wat in de brugklas wordt geleerd kan uitstralen in alle richtingen. Bij de meetkunde wil men beginnen met ruitjes-meetkunde, het rekenen moet gecultiveerd worden, er wordt gerekend met breuken, met irrationale getallen, alles natuurlijk heel eenvoudig. Uitvoerig schetst Timmer hoe de leerlingen $\sqrt{10}$ zullen leren benaderen en vraagt tot slot of de Commissie Modernisering belangstelling heeft voor verdere uitwerking van deze gedachten.

De heer Krooshof vraagt zich af of het onderscheid tussen een havo-mavo-brugklas en een havo-wvo-brugklas wel in de geest is van de Mammoetwet. Het is voorgekomen dat leerlingen van het mavo die op een andere manier wiskunde kregen, beter bleken te zijn, dan men vroeger ooit had kunnen denken, het moet dus mogelijk zijn leerlingen naar boven te determineren. Deze leerlingen dreigen de aansluiting te missen.

Het is hem gebleken dat bij de beantwoording van de vragen over de breuken en lineaire ongelijkheden een nadere toelichting is gegeven, en verzoekt daarom om een uitgebreid verslag. De heer Krooshof besluit zijn opmerkingen als volgt „En toch ben ik van mening dat het programma voor de meetkunde te omvangrijk is".

De voorzitter wil deze opmerkingen als mededelingen beschouwen.

De heer Muskens: „Ik geef les aan een mavo-school. Het voorgestelde programma is niet te zwaar voor de mavo-brugklas, maar wel veel en veel te veel. Bij verschuiving van een deel van de stof naar de tweede klas is de aansluiting van eerste klas mavo naar tweede klas havo eventueel veel beter te realiseren. Bij het mavo is men enorm blij met een gemeenschappelijk leerplan voor de brugklas en ik zou het bijzonder betreuren als men in de kringen van het vwo gaat denken aan een splitsing in een havo-mavo-brugklas en een havo-vwo-brugklas. Het aantal mavo eerste klassers is ontzettend groot, ± 70.000. Dat is een groep leerlingen, die niet zonder meer verwaarloosd kan worden. Ik zou heel graag hebben, dat een definitief leerplan een haalbare zaak is, ook voor deze 70.000 leerlingen. Ik denk aan een basisprogramma dat het overgrote deel van de mavo-leerlingen aankan, waarbij, voor de betere leerlingen

---

[1]) Het is na bijlage 3 in dit blad opgenomen met een toelichting van de heer Timmer.

een verdiept programma kan worden gegeven. Maar graag een basisprogramma, dat een absoluut minimum is en dat een reële zaak is voor mavo-leerlingen. Het voorgestelde programma is niet reëel, maar niet te zwaar."

De heer Troelstra: „Door de (te) beknopte samenvatting van mijn vragen door de voorzitter kan men de indruk krijgen dat ik een tegenstander zou zijn van het gebruik van verzamelingen. Het tegendeel is waar. Mijn vraag was of het juist is dat in de discussienota de verzamelingen als apart stuk worden gemoend. Ik zou graag de verzamelingen in een wiskundeboek, desnoods een algebraboek in de loop van het verhaal opgenomen zien".

Een tweede opmerking: „De kinderen zijn na de zomer-vakantie het ontbinden in factoren grotendeels vergeten en het blijkt dat ze het echt niet goed hebben begrepen. Daarom heb ik gezegd dat ontbinding beter naar de tweede klas kan worden geschoven en het te behandelen bij het vereenvoudigen van breuken, waar het functioneert, dus niet als los onderwerp."

Dr. Van der Neut vindt het argument om de ontbinding naar de tweede klas te verschuiven omdat de leerlingen het na de zomervakantie vergeten zijn niet sterk.

De heer Knip deelt mee dat er in Amsterdam plannen bestaan voor een gemeenschappelijk brugjaar. Hij vindt het jammer, dat er geen experimentele methode bestaat.

Drs. Westerhof wijst op de moeilijke situatie waarin we verkeren. Er zijn in de toekomst zelfstandige mavo, havo en vwo scholen, naast scholen-gemeenschappen. Het is een groot probleem al deze scholen onder dezelfde noemer te vangen. Hij gelooft dat we dit in historisch perspectief moeten brengen. We leven nl. in een vrij gescheiden situatie, we moeten toegroeien naar een grote mate van symbiose, we moeten daar de tijd voor krijgen. Van verschillende kanten komend, enerzijds mavo, anderzijds vwo moeten we trachten het ideaal van de brugklas met voor een groot deel uniforme leerstof te bereiken. De discussienota laat daarom alle mogelijkheden open. Dit geeft de indruk van overlading, maar wanneer dit gepast wordt in een bepaald kader dan zijn we over een jaar al iets verder. We zullen dan echter nog geen beslissing hebben geforceerd wat betreft de ideale opzet van de meetkunde in de brugklas.

De heer Derks zou het betreuren als de termen commutativiteit, associativiteit en distributiviteit zouden inburgeren. Hij heeft de ervaring dat deze woorden bij de leerlingen een psychologische barrière opwerpen.

BIJLAGE 3; rapporteurs: H. C. Vernout en R. Weverling.

Eerste vraag: *Is het niet noodzakelijk in de onderbouw logaritmen en rijen te behandelen? Kunnen niet vervallen: rekenliniaal, vectoren, constructies van driehoeken, trigonometrie in de ruimte (zowel in de onder- als de bovenbouw)? Is het juist, de integraalrekening (i.v.m. de natuurkunde) weg te laten?*

Leujes: Het oude wiskundeprogramma was wel overladen, maar nu worden enkele zaken genoemd, die toch zeker niet mogen vervallen uit de discussienota. Zo is de rekenliniaal toch juist een belangrijk hulpmiddel ter bekorting van berekeningen, o.a. bij wortels, goniometrische functies e.d.

Vectoren vormen juist het centrale probleem in de moderne wiskunde. Men kan ze, bij een bepaalde aanpak, al in de brugklas invoeren in in de onderbouw iets uitbreiden.

Constructies van driehoeken kunnen zeer beperkt worden; men kan bijv. van de geodriehoek gebruik maken.

In R_3 kan men best wat goniometrie bedrijven; de loodrechte stand in een kubus behoeft niet eerst uitvoerig gedefinieerd te worden. Men neme een kubus er bij.

Logaritmen en rijen: het blijft een vraag of deze werkelijk nodig zijn. Het zal er o.a. van afhangen, of de handelswetenschappen op het havo er gebruik van zullen maken.

De integraalrekening hoort niet in het havo; de natuurkunde zal die daar misschien niet eens gebruiken.

„Vectoren in R_3" is voor de onderbouw havo misschien wel wat te veel.

Tweede vraag: Eerste deel (onderbouw havo):

a. *Waarom wel de definitie van $\sqrt[n]{a}$, maar geen opgaven daarover? Vormen als $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{-8}$ zijn toch niet te moeilijk?*
b. *Toepassing van de goniometrie in de ruimte eist algemene definitie van de hoek tussen twee lijnen.*
c. *Het is beter, het begrip radiaal pas later in te voeren.*
d. *Afbeelding van bijv. de even getallen op de natuurlijke getallen eist kennis van oneindige verzamelingen.*

Krooshof: ad a. Vooral geen vraagstukkencultus; dus $\sqrt[3]{a}$. $\sqrt[4]{a}$ niet behandelen. Vraagstukken uitsluitend over vierkantswortels. Het begrip $\sqrt[n]{a}$ kan veel beter pas ingevoerd worden bij de gebroken exponenten.

ad b. Er zijn in de kubus voldoende driehoeken te vinden om goniometrisch hoeken te laten berekenen.

ad c. In de onderbouw kan men vrij kiezen, of men met graden of radialen wil werken. Wellicht is het gunstig in de onderbouw het radiaalbegrip m.b.v. een touwtje spelenderwijs in te voeren, en pas in de bovenbouw de radiaal grondiger te bespreken.

ad d. Inderdaad moeilijk. Het begrip „evenveel" zal dan besproken moeten worden aan de hand van gelijkheid van kardinaalgetallen. Dit kan misschien in de onderbouw van het havo. Eerst eindige verzamelingen behandelen, pas in de tweede ronde oneindige.

Tweede deel (bovenbouw havo):

a. *Limietbegrip zonder ε, δ-notatie? Hoe dan wel?*

b. *Hoe kan men continuïteit invoeren zonder epsilontiek?*

c. *Waarom bij de analytische meetkunde wel de parabool, maar niet de ellips en hyperbool behandelen?*

d. *De stereometrie van het havo lijkt te veel op het huidige hbs-b programma.*

Westerhof: In het algemeen zal de wiskunde op het havo dienstbaar moeten zijn aan bijv. de natuurkunde of de economie. Er zullen weinig of geen leerlingen zijn die zich wiskundig zullen specialiseren. De leerlingen hebben dus een begrippenapparaat nodig voor de wiskunde als hulpwetenschap.

Dit uitgangspunt leidt tot de volgende antwoorden:

ad a. Voor het havo dient het limietbegrip vooral niet te zwaar belast te worden. Rekenkundige bewerkingen niet verder dan: δ berekenen bij gegeven ε.

ad b. Continuïteit is voor het havo geen zelfstandig onderwerp. Incidenteel kan men bij de behandeling van het begrip differentieerbaarheid oók wel eens op continuïteit wijzen.

ad c. Dit sluit aan bij wat thans op de experimenteerscholen gebeurt. Er moet beslist een verkorting komen van het hbs-b programma. De kegelsneden zijn vervallen. De parabool bleef gehandhaafd, niet als exemplarische kegelsnede, maar omdat men de parabool al kent als grafiek van een kwadratische functie.

ad d. Dat is zeker niet de bedoeling. Slechts elementaire stereometrische kennis is nodig, om later m.b.v. vectoren en analytische meetkunde berekeningen te kunnen uitvoeren.

Derde vraag: a. *Is het niet verstandig, de rekenliniaal naar de bovenbouw te brengen?*

b. *Is het programma haalbaar? Het voorgestelde aantal lesuren 4 en 5 in de bovenbouw lijkt volstrekt onvoldoende.*

Schmidt: Meerdere malen is de vraag gesteld, of het programma haalbaar is in de 4 à 5 lesuren.

Volgens de wet zijn er 4 uren in de brugklas, daarna nog minstens 10. Er is ook een totaal maximum voor alle vakken. Men kan zo, bijv. als wiskunde in de bovenbouw gekozen is, komen tot $4+4+4+5+5 = 22$ uur! Voor de bovenbouw zou men aan de 8 onderwerpen genoemd in de discussienota, bijv. kunnen besteden: $10+40+40+25+60+10+40 = 225$ uren.

Bij de 4 en 5 lesuren in de 4e en 5e klas zijn beschikbaar: $4.35+5.20 = 240$ uren, en bij de 5 en 5 lesuren: $5.35+5.20 = 275$ uren; dat is dus genoeg.

Bij een eventuele differentiatie in de 3e klas zou men in de 1e, 2e en 3e ook kunnen geven: 4, 4, 4 of 4, 4, 2 uren, waarbij men dan bijv. rekenliniaal en vectoren voor de niet-mathematische richting zou kunnen laten vervallen.

Logaritmen en rijen zou men ook in een facultatief uur kunnen geven voor hen die het nodig hebben.

Wat het niveau betreft: men moet hierbij niet uitgaan van de huidige experimenterende havo-scholen, want dan krijgt men een verkeerd beeld. De wet zegt duidelijk, dat het havo geen vervanging is van de 5-jarige hbs, maar een voorbereiding op vormen van beroepsonderwijs. Wel moet een zo hoog mogelijk niveau van algemene ontwikkeling bereikt worden.

Vierde vraag: *De berekening in de stereometrie zijn nog te moeilijk.*

Westerhof: Als in de praktijk blijkt, dat de vraagstukken stereometrie voor de onderbouw havo te lastig zijn, zal dat zeker worden herzien. De docenten moeten er wel voor oppassen, niet in de eerste klas ook berekeningen in ruimtelijke figuren te laten maken en dan met de stereometrie tot de vierde klas te wachten. Ook in de tweede en derde klas zal men zich uit het platte vlak los moeten kunnen maken.

Vijfde vraag: *Zullen we uit de onderbouw maar niet weglaten: „$x^2 > a$", bewijzen uit het ongerijmde, lineaire ongelijkheden met twee variabelen, ongelijkheden, vectoren in de ruimte, hoeken groter dan een gestrekte hoek, hoeken en afstanden in de ruimte?*

Schmidt: Het zou jammer zijn, als de ongelijkheden in de onderbouw niet behandeld werden. Men hoeft er geen ingewikkelde theorie aan vast te knopen. Men kan „$x^2 > a$" toch direct aan de hand van twee punten op de getallenrechte bespreken. De relaties voor de

rechte lijn zijn van belang en ze zijn ook eenvoudig te behandelen. De vectoren in R_3 zijn best te gebruiken. Het zal toch zeker niet de bedoeling zijn, op het examen alle onderwerpen aan de orde te stellen. „Bewijzen uit het ongerijmde" is een kwestie van smaak. Spreker houdt er persoonlijk niet van. Het hoeft niet behandeld te worden.

Mondelinge vragen, gesteld tijdens de vergadering.

Eerste vraag (J. K. Timmer): *Tot nu toe werden Mulo-eindexamenopgaven door Mulo-verenigingen samengesteld. Komen hier t.z.t. rijksopgaven?*

Westerhof: Ja. De mavo-eindexamenopgaven zullen onder de rijksinspectie vallen.

Tweede vraag (P. T. A. J. Smit): *De heer Smit vraagt naar de differentiatie in 2 en 3 havo.*
(Voor het antwoord: zie dat op de vierde vraag).

Derde vraag (A. H. Syswerda): *Spreker constateert, dat vele experimenteerscholen nauwelijks klaarkomen met het huidige, vereenvoudigde hbs-programma. Het nieuwe programma is nog uitgebreider. Kent de commissie scholen die wel klaarkomen?*

Schmidt: Er is best versobering mogelijk, die geen wezenlijke beperking betekent. Men moet niet elk onderwerp uitputtend behandelen. Bij irrationale getallen bijv. kunnen breuken met een tweeterm in de noemer best gemist worden.

„Iets" uit de logica hoeft maar heel weinig te zijn, maar scherp formuleren is van groot belang, bijv. voor programmeurs. De technische kant van de wiskunde mag geen hoogtij vieren, maar er moet inzicht aangebracht worden. De commissie wil beslist ook geen overlading. Het huidige havo-experiment is beslist geen maatstaf voor de toekomst.

Vierde vraag (A. J. Elzenaar): *Deze vraag betreft pag. 27 van het interimrapport.*
a. *Als in 2,3 havo splitsing wordt toegelaten, geldt dit dan voor 2 en 3, of voor 2 òf 3?*
b. *Als er een differentiatie komt, waarvan spreker een groot voorstander is, is het dan mogelijk om regel 11 van pag. 27 van het interimrapport zo te wijzigen, dat de betreffende leerlingen ook mogen kiezen uit onderwerpen van de bovenbouw havo? Zij die na drie jaar ophouden met wiskunde hebben daar voor hun algemene ontwikkeling meer aan.*

Gribnau: ad a. Spreker is het niet eens met de meerderheid van de subcommissie, die geen differentiatie wilde in 2 en 3 havo. Op de experimenteerscholen is men al op moeilijkheden gestuit. Men heeft toen na Pasen de tweede klas gesplitst. Thans is de derde klas gesplitst.
ad b. Als in de derde klas gesplitst is, kan de groep die in de wiskunde doorgaat, het gewone programma afwerken, terwijl de groep die na drie jaar met wiskunde ophoudt, niet hetzelfde programma moet krijgen onder mildere beoordeling, maar liever een voor hen zinniger wiskunde, welke onderwerpen daarbij dan ook aan de orde mogen komen.

Wat spreker betreft, zal de derde klas havo zeker gesplitst moeten worden. De bovenbouw havo sluit aan op Hts enz. Dit betekent, dat men de derde klas wiskunde niet mag opofferen aan de zwakke leerlingen.
Westerhof: De heer Westerhof spreekt namens de meerderheid in de subcommissie. Op basis van de huidige experimenteerscholen zal er zeker gesplitst moeten worden. Maar men experimenteerde te veel met een aftreksel van het huidige hbs-programma.

De bedoeling van de commissie was echter een modernere aanpak. Met name wat betreft het gebruik van de taal der verzamelingen. Misschien kan dit wèl in een gemeenschappelijk programma.

De bedoeling is, in 1968 havo 2 in ieder geval bij elkaar te houden. Voor havo 3 zal dat misschien niet lukken. De praktijk zal dat moeten leren.

Vijfde vraag (A. Meerman): *Als er sprake is van „toepassing op concrete problemen, in het bijzonder bij de te kiezen vraagstukken", denkt de commissie dan aan bijv. ingeklede vraagstukken in het hoofdstuk vierkantsvergelijkingen? Deze sla ik over, en neem liever een vraagstuk over de wet van Boyle. Zou het niet nuttig zijn, dergelijke vraagstukken uit andere vakken te verzamelen als facultatief materiaal?*

Westerhof: Akkoord. Een wiskundeboek met als toegift ingeklede vergelijkingen is uit de boze. De Engelse boeken geven ook al vaak praktijkvraagstukken.

Zesde vraag (L. G. Muskens): *In het mavo-programma komen logaritmen, rijen en berekeningen met vectoren voor, die in het havo pas in de bovenbouw verschijnen. Wettelijk geeft mavo 4 aansluiting op de bovenbouw van het havo. Hoe zit dat nu? Is het mavo niet overladen?*

Schmidt: Vanuit mavo 4 gaat men niet alleen naar havo 4, maar ook naar hoger beroepsonderwijs.

Er zal zeker nog wel wat wegvallen uit het mavo-programma; welke onderwerpen? Dat zal nog moeten blijken.

Mavo moet niet equivalent worden met onderbouw havo, maar mag best een eigen signatuur dragen.

Conceptprogramma wiskunde in de brugklas (Hengelo)

De wiskundesubcommissie voor onderwijs in de brugklas te Hengelo (O.) is tot de volgende voorlopige conclusie gekomen:

Men hoort zeer veel klachten over slecht rekenen. Vroeger werd op de h.b.s. in de eerste klas een uur rekenen gegeven, nog vroeger twee uur. Wij menen dat deze wijziging de rekenprestaties ongunstig heeft beïnvloed en achten het daarom gewenst, dat die leerlingen, welke zulks nodig hebben, daadwerkelijk in de gelegenheid gesteld worden, een behoorlijk aantal studie-uren aan rekenen en wiskunde te besteden.

Wij zien twee facetten van het onderwijs in de brugklas:

A Aansluiting bij het geleerde op de lagere school, met herhaling en verdieping daarvan.

B Bevordering van wiskundig inzicht als voorbereiding op het onderwijs in de volgende klassen.

A Herhaling van het rekenen met niet-negatieve rationale getallen kan geschieden door regelmatig hoofdrekenen, eventueel met taxaties, beoordeling van groter en kleiner, procenten, oppervlakte, inhoud. Het rekenen kan ondersteund worden door een grafiek of door een tabel met dubbele ingang (b.v. als het zou gaan om een berekening met vreemd geld) ter voorbereiding van de evenredigheid in matrixvorm. Het begrip van optelling en andere bewerkingen kan verhelderd worden door de operatie tussen één getal en de getalverzameling op de getallenrechte af te beelden. Het begrip: wortel uit een getal kan worden gezien door ontbinding van dat getal in twee gelijke factoren, tegen de achtergrond van ontbinding in twee ongelijke factoren (Methode van Hero).

Onnodig cijferwerk is te vermijden door het aanleren van verkorte vermenigvuldiging en verkorte deling. Het rekenen trede vooral op het terrein van andere vakken.

B Het wiskundig inzicht worde aangebracht met het begrip verzameling als basis, waarbij we ons zowel op algebraïsch als op meetkundig terrein tot het gehele getal beperken. Als voorbeelden van elementen van een verzameling kunnen objecten buiten de wiskunde evengoed dienen als objecten binnen de wiskunde: getal, getallenpaar, punt, rechte, figuur. Voorstelling van deze begrippen door een letter. Substituties. Namen van speciale getallen en van speciale figuren. Verzamelingen van elementen, die eenzelfde naam dragen, b.v. de evengetallen, de driehoeken. Deelverzameling van een andere verzameling, b.v. de tienvouden, de gelijkzijdige driehoeken.

De structuur van begrippen worde met venn-diagrammen ondersteund (ook buiten de wiskunde bruikbaar).

Lege verzameling en aantal deelverzamelingen. Afbeelding van een verzameling op een andere. Introductie van het functiebegrip. De één-eenduidige afbeelding

heeft ook voorbeelden buiten de wiskunde (eigentaal-vreemde taal). De doorsnede van twee verzamelingen kan b.v. dienen tot beter begrip van de rechthoekiggelijkbenige driehoek, van ggd en kgv. Getallverzamelingen, die ontstaan door een of meer voortbrengers te onderwerpen aan een hoofdbewerking.

Samenhang der hoofdbewerkingen en enige eigenschappen ervan. Associativiteit, commutativiteit en distributiviteit.

Relaties in een verzameling van paren. Eigenschappen van relaties, speciaal van de equivalentierelatie. De gebruikelijke bewerking in de ring der veeltermen, in verband met de bijzondere rol van de getallen 0 en 1. Eventueel modulair rekenen en andere talstelsels.

Roostermeetkunde tot en met de bijzondere vierhoek. Geleidelijke overgang van experiment via verklaring tot het bewijs van een stelling.

Scherpte van definities.

De stelling van Pythagoras (volgens de aanhef met gehele getallen) kan het sluitstuk van de meetkunde zijn.

Wij ontvangen graag reacties.

Timmer, voorzitter
Beeftink, secretaris

TOELICHTING (van J. K. Timmer)

Als de algebra in de brugklas zich beperkt tot het gehele getal, dan wordt de eenheid van het in die klas te geven wiskundeonderwijs bevorderd door dezelfde gedragslijn te volgen ten aanzien van de meetkunde. Dit voert ons tot een roostermeetkunde, waarin b.v. weinig plaats is voor hoeken van zoveel graden, maar wel voor coördinaten, oppervlakte (wat aansluit bij de leerstof van de lagere school), symmetrie, transformatie. Vooral bij gebruik van een z.g. geoplan kan men met oppervlaktebeschouwing gemakkelijk komen tot de driehoek (3, 4, 5) zonder de stelling van Pythagoras in volle omvang te behandelen. Ook kunnen de leerlingen dan 12 roosterpunten aangeven van een cirkel, die een roosterpunt tot middelpunt heeft en een straal 5. De meetkunde kan op deze wijze tot een afgerond geheel worden gemaakt, en toch zo, dat de verkregen kennis kan uitstralen in het vervolgonderwijs.

Het inzicht, dat een bepaald begrip een bijzonder geval van een ander begrip is, of een gemeenschappelijk bijzonder geval van enige begrippen voert tot de deelverzameling van een verzameling en tot de doorsnede van twee (eventueel meer) verzamelingen. Het begrip verzameling kan dus behandeld worden, als het bij een of andere wiskundige structuur aan de orde komt. Voor de meetkunde geeft de vierhoek met zijn talrijke specialisaties ruim voldoende voorbeelden.

Een zinvolle specialisatie in de algebra vindt men bij de bewerkingen met veeltermen in x. Zo kan 23.24 als specialisatie van $(2x + 3)(2x + 4)$ opgevat worden en dit voert ons naar een beknopte behandeling van een of meer andere talstelsels, omdat de vraag of we voor x in plaats van tien ook iets anders mogen substitueren nu glad voor de dag komt. Desgewenst kan een uiterst beknopte behandeling van modulair rekenen gegeven worden, o.a. omdat het denkbaar is dat zulks de latere behandeling van de radialen ten goede kan komen.

Transformatie en functie behoren bij elkaar. Het functiebegrip kan in de brugklas op volkomen natuurlijke wijze worden voorbereid door een operatie tussen één vast getal en de verzameling gehele getallen aan de orde te stellen. Zo geeft de optelling aanleiding tot $f(x) = x + 2$. Wordt dit als translatie op de getallenrechte afgebeeld, dat kan het begrip optellen daardoor verhelderd worden. Evenzo de vermenigvuldi-

ging. $F(x) = 2x$ kan op de getallenrechte worden voorgesteld als spreiding vanaf het nulpunt.

Hoewel het in ons concept onder „B" vermelde zich beperkt tot de gehele getallen, lijkt het ons noch nodig, noch gewenst hetzelfde standpunt in te nemen m.b.t. de herhaling van het rekenonderwijs, dat de kinderen op de lagere school genoten hebben. Er kan veel met een schema gewerkt worden dat later gelegenheid biedt de evenredigheidsmatrix aan de orde te stellen. Er kan met rationale getallen gewerkt worden, eventueel beperkt tot het positieve. In dat geval kan machtsverheffing c.q. kwadratering uitgebeeld worden als spreiding vanaf het eenheidspunt, worteltrekking als concentratie naar het eenheidspunt. Bij een taxatie als $\sqrt{0,8} = 0,9$ heeft dit voordeel, de kinderen krijgen nu ook enig idee van de wortelfunctie.

BOEKBESPREKING

H. Witting, *Mathematische Statistik*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1966, 223 blz., D.M. 46.—.

De statistiek —waarin het gaat om de problematiek van het trekken van konklusies uit waarnemingsmateriaal, gebaseerd op de kansrekening —is allengs ontwikkeld tot een volwaardig stuk wiskunde.

Het doel van Witting is, om in het onderhavige boekje een inleiding in dit stuk wiskunde te geven.

De probleemstelling is als volgt. Stel, dat de uitkomsten van een serie eksperimenten beschreven worden door een kansveld, waarin echter een onbekende parameter voorkomt. Op grond van de gerealiseerde uitkomsten dient nu een uitspraak over deze onbekende parameter te worden gedaan. Met name wordt verondersteld, dat uit een gegeven verzameling van uitspraken gekozen dient te worden. Een voorschrift, dat aan elke mogelijke uitkomst een uitspraak toevoegt, heet een beslissingsregel. Het doel is nu te komen tot de keuze van een beslissingsregel. Hiertoe is het echter noodzakelijk eerst een waardering vast te leggen voor de verschillende mogelijke beslissingsregels. Daarna kan op basis van deze waardering de kwaliteit van de verschillende beslissingsregels vergeleken worden.

Het boek geeft een diepgaande analyse van de geschetste problematiek, waarbij een centrale plaats is ingeruimd voor de bestudering van funkties van de uitkomsten, die alle relevante informatie betreffende de onbekende parameter bevatten (het begrip sufficiency). Bijvoorbeeld, bij een serie worpen met een muntstuk is het aantal malen dat kruis geworpen is „sufficient" voor de kans op de uitkomst kruis.

De opbouw van de kansrekening op basis van de maattheorie wordt bekend verondersteld en om het boekje met vrucht te kunnen lezen is een grondige kennis hiervan ook noodzakelijk. Doordat de problematiek voor een groot deel in maattheoretische termen behandeld wordt, is —om enigszins de praktische achtergrond te kunnen zien en de lijn van het betoog te blijven volgen— een behoorlijke kennis nodig van de statistische denkwijze en de gebruikelijke methoden. Voor een kennismaking met de wiskundige statistiek is het boekje dus niet erg geschikt.

De bijzonder gedegen en zorgvuldige aanpak van deze moeilijke en zeer ingewikkelde materie dwingt tot bewondering voor de auteur, doch veroorzaakt tevens een flinke beperking van de kring van potentiële lezers.

J. Wessels

PAPY, MATHÉMATIQUE MODERNE 6

door

Dr. P. G. J. VREDENDUIN

Oosterbeek

Er zijn twee soorten boeken, waar ik ogenblikkelijk mee begin, zodra er „een nieuwe" verschijnt en die ik met spanning uitlees. Dat zijn Maigret en Mathématique Moderne. De auteurs zullen wel verbaasd zijn in één adem genoemd te worden, maar hopelijk willen ze het me vergeven.

Ook MM6 houdt de aandacht van de lezer weer van het begin tot het einde gespannen [1]). Ditmaal is de meetkunde aan de beurt. De schrijver geeft een volledig overzicht over zijn behandelingswijze van de meetkunde. Hij begint met een recapitulatie van de meetkunde, zoals die behandeld is in de onderbouw (de laagste drie klassen). Daarop volgt de stof, die behandeld wordt in de laagste klasse van de bovenbouw.

Papy gaat er van uit, dat vlakke meetkunde in wezen niets anders is dan de studie van de tweedimensionale lineaire ruimte over het lichaam van de reële getallen en voorzien van een inprodukt. Maar natuurlijk kan men daarmee niet beginnen, want voor de kinderen is de euclidische tweedimensionale ruimte gegrond in de aanschouwing (en daarin hebben de kinderen niet eens ongelijk). We moeten dus bij de opbouw van de planimetrie uitgaan van de aanschouwing en zoveel aan de aanschouwing ontlenen, dat voor deze planimetrie de axioma's van de lineaire ruimte met inprodukt blijken te gelden. Zodra men zover is, kan men overschakelen op de lineaire algebra en als „enig axioma" aannemen: $\mathbb{R}$, Π_0, $+$ is een lineaire ruimte voorzien van een inprodukt. In de onderbouw gaan we uit van de aanschouwing en maken de leerlingen rijp voor het begrijpen van dit „enige axioma"; in de laagste klasse van de bovenbouw gaan we van dit enige axioma uit en ontwikkelen we de consekwenties daarvan. Ziedaar in grote lijnen het plan van Papy.

---

[1]) Voor een bespreking van deel 1, 2 en 5 zie resp. Euclides **39**, VIII, p. 237—246, **42**, III, p. 90—94, **42**, VI, p. 161—166.

Wimecos

Overzicht van inkomsten en uitgaven
over het verenigingsjaar 1966-1967.

Inkomsten

Saldo op 1 september 1966:	giro	*f* 564.05	
	kas	114.35	
	bank	8968.21	*f* 9646.61
Contributies:	1965 - 1966	9.-	
	1966 - 1967	5939.-	
	1967 - 1968	551.50	6499.50
Onkostenvergoeding havo-commissie			751.40
Bijdrage niet-leden Symposion Twente			40.-
Onkostenvergoeding reis Moskou			750.-
Opbrengst "250 opgaven"			928.76
Rente			321.85
			f 18938.12

Uitgaven

Adm & PTT			*f* 726.99
Abonnementen Euclides			3624.50
Vergaderingen:	bestuur	*f* 339.44	
	jaarvergadering	504.20	
	Symposion Twente	305.70	1149.34
Reiskosten			613.10
Reis Engeland			500.-
Boekenbonnen sprekers			250.-
Prijsvraag Phytagoras			45.-
Bloemen			10.-
Redaktie Euclides			200.-
Tijdschriftencommissie			100.-
Saldo per 31 aug 1967:	giro	2301.36	
	kas	131.97	
	bank	9285.86	*f* 11719.19
			f 18938.12

I

Om een goed begrip van het geheel te krijgen, is het nuttig eerst de recapitulatie van de meetkunde in de onderbouw te beschouwen. Aan de hand van de aanschouwing wordt daar telkens de waarheid van bepaalde uitspraken gedemonstreerd. Anderzijds wordt de eis van strenge deductie gehandhaafd. Deze twee schijnbaar tegenstrijdige methoden worden verzoend door telkens, als aan de aanschouwing waarheden ontleend zijn, deze in een volzin te recapituleren en dan axioma te noemen. Uiteraard wordt daarbij zo min mogelijk aan de aanschouwing ontleend. Al datgene, wat uit de axioma's bewezen kan worden, al is het aanschouwelijk ook evident, wordt bewezen. En niet zoals bij ons gangbaar is, deels streng en deels met aanschouwelijke insluipsels, maar volmaakt streng.

Men kan alleen maar begrijpen, hoe Papy daarbij te werk gaat, als men zijn gedachten volgt en de opgestelde axioma's expliciet vermeldt. De eerste serie van drie axioma's luidt:

Axioma 1. Het vlak Π is een oneindige verzameling punten.

Axioma 2. De rechte lijnen zijn oneindige echte deelverzamelingen van Π.

Axioma 3. Elk paar punten is deel van precies één rechte lijn.

Hierop volgt de definitie van evenwijdige rechten (samenvallen is een bijzonder geval van evenwijdigheid) en van de richting van een rechte. De richting van A wordt gedefinieerd als de verzameling van de rechten evenwijdig aan A. Waarna komt

Axioma 4. Elk richting is een partitie van het vlak (partitie = klasseïndeling).

Dit axioma behelst dus, dat voor elke rechte A geldt: door elk punt van het vlak gaat precies één rechte evenwijdig aan A.

Nu komt de loodrechte stand aan de orde.

Axioma 5. Elke richting $\mathscr{A}$ bepaalt precies één richting $\mathscr{A}'$, waarvoor geldt $\mathscr{A}' \perp \mathscr{A}$. Verder geldt

$$\mathscr{A} \perp \mathscr{A}' \Leftrightarrow \mathscr{A}' \perp \mathscr{A},$$
$$\mathscr{A} \perp \mathscr{A}' \Rightarrow \mathscr{A} \neq \mathscr{A}'.$$

De gangbare eigenschappen betreffende evenwijdigheid en loodrechte stand kunnen nu worden bewezen.

Nu volgt de theorie van de ordening. Ook hier wordt weliswaar de aanschouwing als uitgangspunt genomen, maar maakt een geschikt gekozen axioma elk beroep op de aanschouwing daarna overbodig. Papy constateert, dat de punten van een rechte op onbeperkt veel manieren geordend kunnen worden. Een beroep op de aanschouwing leert, dat twee ordeningen corresponderen met het

„doorlopen" van een rechte. Deze twee ordeningen noemt hij de natuurlijke ordeningen. Dit inzicht wordt vertegenwoordigd door het axioma:

Axioma 6. Er zijn twee ordeningen op elke rechte, die natuurlijke ordeningen heten. Deze ordeningen zijn elkaars inverse.

Dit axioma is wetenschappelijk correct. Het axioma zegt, dat het mogelijk is de punten van een rechte totaal te ordenen. Verder komt erin voor als ongedefinieerde grondterm van het axiomastelsel: natuurlijke ordening. Het axioma zegt nu, dat een natuurlijke ordening van de punten op een rechte een totale ordening is, en dat er twee natuurlijke ordeningen zijn en deze elkaars inverse zijn. Deze diepere zin is voor de leerling niet te doorgronden. Maar dat is niet nodig, omdat het axioma aan zijn doel beantwoordt: het maakt samen met axioma 7 deductieve afleiding van alle andere uitspraken, waarin de volgorde een rol speelt, mogelijk. En daar is het Papy didactisch om begonnen.

Een rechte oriënteren wil nu zeggen één van de beide natuurlijke ordeningen kiezen als ordening van de rechte. Deze wordt dan genoteerd $\leqq$.

Axioma 6 alleen is echter nog niet voldoende. We kunnen eerst verder, als het ons mogelijk gemaakt wordt ordeningen op verschillende rechten met elkaar in verband te brengen. Hiervoor dient axioma 7.

Axioma 7. Als A en B georiënteerde rechten zijn, dan is elke projectie van A op B monotoon. Als A en B evenwijdige georiënteerde rechten zijn, dan zijn hetzij alle projecties van A op B monotoon stijgend, of alle projecties van A op B monotoon dalend (projectie = parallelprojectie).

Het tweede deel van axioma 7 maakt definitie van gelijk resp. tegengesteld georiënteerde evenwijdige rechten mogelijk. Verder is op basis van de natuurlijke ordening van een rechte definitie mogelijk van lijnstuk, halve lijn, half vlak, convexe verzameling.

Als voorbereiding voor de translatie volgt nu de definitie van ekwipollente geordende puntenparen (koppels). Als a, b, c en d niet op één rechte liggen, dan is per definitie $(a, b) \uparrow (c, d) \Leftrightarrow (ab \parallel cd$ en $ac \parallel bd)$. Liggen ze wel op één rechte en is $a \neq b$, dan is $(a, b) \uparrow (c, d)$ als er een derde koppel (e, f) bestaat zo, dat $abfe$ en $cdfe$ parallellogrammen zijn. En ten slotte is nog $(a, a) \uparrow (b, b)$.

De ekwipollentie is reflexief en symmetrisch. En bovendien:

Axioma 8. De ekwipollentie is transitief.

En dus is de ekwipollentie een ekwivalentierelatie.

Op het eerste gezicht lijkt axioma 8 vreemd. Wie zich realiseert,

dat we nog niet beschikken over de relatie gelijkheid tussen lijnstukken, zal de noodzaak van dit axioma beter begrijpen.

Nu wordt bewezen, dat projecties van ekwipollente koppels weer ekwipollent zijn. En verder de kleine stelling van Thales, volgens welke de projectie van het midden van een koppel het midden van de projectie is. (Per definitie is m het midden van het koppel (a, b), als $(a, m) \uparrow (m, b)$.)

Thans is de tijd rijp voor het definiëren van de translatie. Deze blijken een groep te vormen t.o.v. de samenstelling. De groep van de vectoren is niets anders dan de groep van de translaties, additief genoteerd. Tussen translaties en vectoren is dus geen ander verschil dan dat de operatie, die de verzameling tot een groep maakt, $\circ$ resp. $+$ genoteerd wordt. En daarmee kan automatisch elke uitspraak over translaties vertaald worden in een uitspraak over vectoren.

Deze definitie van een vector vereist nog wel enige toelichting. Papy gaat uit van de groep $\mathscr{T}, \circ$, waarin $\mathscr{T}$ de verzameling van de translaties voorstelt. Onderstel we hebben een willekeurige verzameling $\mathscr{V}$ met de eigenschap, dat er een bijectie f bestaat tussen de elementen van $\mathscr{T}$ en van $\mathscr{V}$. Verder definiëren we een operatie $+$, die uit een tweetal elementen van $\mathscr{V}$ een element van $\mathscr{V}$ afleidt zo, dat

$$t_1 \circ t_2 = t_3 \Rightarrow f(t_1) + f(t_2) = f(t_3).$$

Ten gevolge van deze definitie is de groep $\mathscr{V}, +$ isomorf met de groep $\mathscr{T}, \circ$. De elementen van de verzameling $\mathscr{V}$ noemen we dan vectoren. Vectoren kunnen dus elementen van allerlei verzamelingen zijn, mits aan bepaalde zuiver structurele eisen voldaan is.

Zo hebben we nu het recht ekwivalentieklassen van ekwipollente koppels vectoren te noemen. Doorgaans worden deze klassen vrije vectoren genoemd.

Ook kunnen we een willekeurig punt van het vlak Π kiezen en dit o noemen. Het vlak Π met daarin het gekozen punt o noemen we Π_0. Met elke (vrije) vector $\vec{v}$ correspondeert nu eenduidig een punt v zo, dat $(o, v) \in \vec{v}$. Hierdoor wordt het verantwoord de punten in vlak Π_0 vectoren te noemen, mits we maar de optelling op adequate manier definiëren.

Duidelijk zien we hier een anticiperen op de theorie van de lineaire ruimte. De vectoren en de vectoroptelling zijn reeds bereikt, nu de vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal nog.

Hiervoor is nodig de theorie van het reële getal. Bij de bespreking van MM2 is reeds uitvoerig uiteengezet, hoe Papy de reële getallen invoert. Deze invoering behelst tevens een stuk meetkunde, omdat

de reële getallen door een bijectie gekoppeld worden aan de punten van een georiënteerde rechte. Ik wil hier volstaan met eraan te herinneren, dat hierbij ter sprake komen het axioma van Archimedes (axioma 9) en het continuïteitsaxioma (axioma 10). Theorema van Thales, homothetie en vermenigvuldiging van een vector met een reëel getal passeren daarna de revue. En daarmee is de tweedimensionale lineaire vectorruimte tot stand gekomen.

Maken we de balans op van hetgeen totnogtoe bereikt is, dan zien we, dat een stuk affiene meetkunde ontwikkeld is. De enige grensoverschrijding is geschied bij het opstellen van axioma 4. Het is uit didactisch oogpunt begrijpelijk, dat Papy in een vroeg stadium dit axioma reeds geponeerd heeft. Toch vraag ik mij af, of hij achteraf geen berouw heeft. Zijn gevoel voor een strakke en wetenschappelijk verantwoorde opbouw moet hem dit voortijdig invoeren van de loodrechte stand op de duur een doorn in het oog doen zijn.

De schrijver gaat nog even door met de affiene meetkunde om twee affiene transformaties te behandelen, nl. de puntspiegeling en de affiene lijnspiegeling. Omdat we weten, wat onder het midden van een lijnstuk verstaan wordt, kunnen deze transformaties hier reeds behandeld worden. Bij de affiene lijnspiegeling is het beeld van een „voetbal" een „rugbybal". De leerling zal daardoor de behoefte voelen te bewijzen, dat het beeld van een rechte weer een rechte is.

Als bijzonder geval van de affiene lijnspiegeling wordt de orthogonale lijnspiegeling behandeld en hier is dan voor het eerst het axioma 4 nodig. De orthogonale spiegeling brengt ons ertoe een definitie te geven van de bissectrice van een figuur, die bestaat uit twee halve rechten met gemeenschappelijk eindpunt (de term hoek wordt nog vermeden). Spiegeling t.o.v. deze bissectrice doet de figuur in zichzelf overgaan. Maar bestaat deze bissectrice wel altijd? De aanschouwing leert ons van wel. Vandaar

Axioma 11. Als $\bar{A}$ en $\bar{B}$ twee gesloten halve rechten met gemeenschappelijk eindpunt zijn, dan bestaat er precies één rechte M, waarvoor $s_M\bar{A} = \bar{B}$. (s stelt de orthogonale spiegeling t.o.v. M voor.)

Nu we de spiegelingen eenmaal tot onze beschikking hebben, kost het weinig moeite meer door samenstelling van spiegelingen te komen tot de reeds bekende translatie en tot de rotatie. Als $\bar{A}$ en $\bar{B}$ weer twee gesloten halve rechten zijn met hetzelfde eindpunt en M de bissectrice van deze figuur is, dan zal bij de rotatie $s_M \circ s_A$ de halve rechte $\bar{B}$ het beeld zijn van $\bar{A}$. Door rotatie kan $\bar{A}$

dus afgebeeld worden op $\bar{B}$. Is er slechts één dergelijke rotatie of zijn er meer? Onze intuïtie leert ons, dat er slechts één is. Vandaar

Axioma 12. Er is slechts één rotatie, die $\bar{A}$ afbeeldt op $\bar{B}$.

De theorie van de groep van de isometrieën wordt nu zonder moeite verder ontwikkeld. En daarmee is de grond gelegd voor de verdere ontwikkeling van de metriek.

Konden we in de affiene meetkunde alleen maar lijnstukken vergelijken, die delen van evenwijdige lijnen zijn, thans kunnen we willekeurige lijnstukken vergelijken en zo tot een definitie van de lengte van een lijnstuk geraken. We behoeven daartoe slechts uit te gaan van één getallenlijn. Zijn a en b twee punten, dan is er een isometrie, die a afbeeldt op het nulpunt van de getallenlijn en b op een punt van deze lijn met positieve abscis r. Dan heet r de afstand van a en b en tevens de lengte van de vector $\vec{ab}$. Bewezen wordt, dat r eenduidig bepaald is door a, b en de gekozen getallenlijn.

Nu volgt de definitie van het scalaire produkt van twee vectoren. Dit geschiedt in twee etappes: eerst wordt het scalaire produkt gedefinieerd van twee parallelle vectoren en daarna volgt de algemene definitie. De gebruikelijke eigenschappen van dit produkt worden bewezen. Daarna volgt de definitie van de cosinus van een vectorpaar. Verder is hier eerst de definitie van een cirkel mogelijk.

En hiermee is dan onze lineaire ruimte voorzien van een inprodukt en hebben we dus ons aanvankelijk gestelde doel bereikt.

Er rest nog één begrip te definiëren, dat totnogtoe steeds omzeild is: het begrip hoek. Papy definieert een hoek als een rotatie op een translatie na. De verzameling van de rotaties kan namelijk in ekwivalentieklassen verdeeld worden zo, dat rotaties die tot een zelfde klasse behoren door een translatie in elkaar kunnen overgaan. Deze ekwivalentieklassen noemt Papy hoeken. Zijn $\hat{r}_1$ en $\hat{r}_2$ hoeken en r_1 en r_2 rotaties, waarvoor geldt $r_1 \in \hat{r}_1$ en $r_2 \in \hat{r}_2$, dan is dus

$$\hat{r}_1 = \hat{r}_2 \Leftrightarrow r_2 \text{ kan door translatie uit } r_1 \text{ ontstaan.}$$

De optelling van hoeken wordt op dezelfde manier gedefinieerd met behulp van de samenstelling van rotaties als vroeger de optelling van vectoren gedefinieerd is met behulp van samenstelling van translaties.

II

We gaan nu uit van het „enige axioma'': R, Π_0, $+$ is een tweedimensionale lineaire ruimte voorzien van een inprodukt. Een dergelijke ruimte heet ook een euclidisch vlak. Voorlopig blijft

het inprodukt buiten beschouwing en worden de fundamentele eigenschappen van een tweedimensionale vectorruimte besproken. De enige echte lineaire deelruimten blijken te zijn: $\{\vec{o}\}$ en de eendimensionale ruimten $\{R\vec{x} | \vec{o} \neq \vec{x} \in \Pi_0)$. Deze laatste ruimten heten de vectoriële rechten van Π_0.

In het volgende hoofdstuk worden de lineaire transformaties besproken. Dit zijn permutaties of projecties of ten slotte de afbeelding van elke vector op $\vec{o}$. We stellen de verzameling van de lineaire transformaties van Π_0 voor door $\mathscr{L}(\Pi_0)$; $\mathscr{L}(\Pi_0)$, $+$, $\circ$ blijkt een ring te zijn. De deelverzameling van $\mathscr{L}(\Pi_0)$, die alleen uit de permutaties bestaat, is een groep t.a.v. de bewerking $\circ$, immers binnen deze verzameling heeft elke transformatie een inverse. Op de meetkundige betekenis van de lineaire transformaties gaat Papy uitvoerig in.

Daarna komen de matrices aan de orde. Optelling en samenstelling van transformaties corresponderen met optellen en vermenigvuldigen van matrices. Met de permutaties corresponderen matrices, waarvan de determinant $\neq 0$ is, en met de projecties matrices met determinant $= 0$.

In het bijzonder wordt aandacht geschonken aan de homothetieën. Dit zijn de transformaties met matrix $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}$, waarin $r \in R$. We stellen zo'n homothetie kortweg voor door r. Deze identificatie van homothetieën en reële getallen, althans wat de notatie betreft, berust uiteraard op een isomorfie.

Nu komt ook het inprodukt ter sprake. Dit wordt gebruikt om de lengte van een vector en de cosinus van een vectorpaar te definiëren. Vectoren, die ongelijk $\vec{o}$ zijn, zijn orthogonaal, als hun inprodukt 0 is. Pythagoras en cosinusregel liggen nu voor het grijpen. De ongelijkheid van Cauchy-Schwartz $|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leqq ||\vec{x}|| \cdot ||\vec{y}||$ wordt bewezen, waarna de driehoeksongelijkheid gemakkelijk volgt. Verder blijkt het mogelijk in Π_0 een orthonormale basis te kiezen.

Het voorgaande heb ik zeer kort samengevat, omdat ieder zich tegenwoordig wel ongeveer zal kunnen voorstellen, hoe de behandeling verloopt. Het nu volgende deel geeft weer een verhoging van de spanning. Een orthogonale transformatie wordt gedefinieerd als een lineaire transformatie, die het inprodukt invariant laat. De eerste stelling zegt nu, dat de volgende vier beweringen ekwivalent zijn:

t is orthogonaal,

t beeldt elke orthonormale basis op een orthonormale basis af,

er is een orthonormale basis, die t op een orthonormale basis afbeeldt,

t laat de lengte invariant.

Hierin is t een lineaire transformatie.

De orthogonale transformaties blijken een groep te vormen, de groep $\mathcal{O}(\Pi_0)$, o. Met de orthogonale transformaties corresponderen de orthonormale matrices, d.z. de matrices

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ waarvoor } \begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ ac + bd = 0 \\ c^2 + d^2 = 1. \end{cases}$$

Anders gezegd: het zijn de matrices, waarvan de getransponeerde tevens de inverse is.

Onderstel, dat $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ een orthogonale basis is en dat bij een orthogonale transformatie t

$$t\,\vec{e}_1 = a\,\vec{e}_1 + b\,\vec{e}_2.$$

Er zijn precies twee genormeerde vectoren, die loodrecht op $t\,\vec{e}_1$ staan, nl. $b\,\vec{e}_1 - a\,\vec{e}_2$ en $-b\,\vec{e}_1 + a\,\vec{e}_2$. Daaruit volgt, dat een orthogonale matrix er als volgt uitziet:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \quad \text{of} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \qquad (a^2 + b^2 = 1).$$

De verzameling van de eerstgenoemde matrices heet O_2^+, die van de laatstgenoemde O_2^-, hun vereniging O_2. Hiervoor gelden de volgende eigenschappen:

O_2 is een groep voor de matrixvermenigvuldiging,
O_2^+ is een commutatieve deelgroep van O_2,
$O_2^+ \cdot O_2^+ = O_2^+ = O_2^- \cdot O_2^-$,
$O_2^+ \cdot O_2^- = O_2^- = O_2^- \cdot O_2^+$,
het kwadraat van elke matrix van O_2^- is de eenheidsmatrix.

Nu gaan we weer terug naar de transformaties. Twee soorten orthogonale transformaties worden onderzocht:

a. de (orthogonale) spiegelingen, gedefinieerd door het bestaan van een orthonormale basis, waarvoor geldt $t\,\vec{e}_1 = \vec{e}_1$ en $t\,\vec{e}_2 = -\vec{e}_2$,

b. de rotaties, die samenstellingen van twee spiegelingen zijn.

Het blijkt, dat dit resp. zijn de verzamelingen $\mathcal{O}^-$ en $\mathcal{O}^+$ van de transformaties, waarvan de matrix tot O_2^- resp. tot O_2^+ behoort. De bovengenoemde stellingen betreffende O_2^+ en O_2^- kunnen nu direct vertaald worden in stellingen over spiegelingen en rotaties.

Bovendien blijken er geen andere orthogonale transformaties te bestaan. De rotaties hebben een determinant, die $= 1$ is, en de spiegelingen een determinant, die $= -1$ is.

Bewezen wordt, dat bij een rotatie r met matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ voor elke vector $\vec{x}$ geldt: $\cos(\vec{x}, r\vec{x}) = a$. Dit is aanleiding om a de cosinus van de rotatie r te noemen. De matrix van een rotatie r is dus

$$\begin{pmatrix} \cos r & \sqrt{(1-\cos^2 r)} \\ -\sqrt{(1-\cos^2 r)} & \cos r \end{pmatrix} \text{ of } \begin{pmatrix} \cos r & -\sqrt{(1-\cos^2 r)} \\ \sqrt{(1-\cos^2 r)} & \cos r \end{pmatrix}.$$

Enige speciale rotaties zijn:
de halve draai, d.i. de rotatie die van de identiteit verschilt en waarvan het kwadraat de identiteit is (dit blijkt te zijn de homothetie -1),
de kwart draaien, d.z. de rotaties, waarvan het kwadraat een halve draai is.

Er blijken twee kwart draaien te zijn, nl. de transformaties met matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Het volgende hoofdstuk is gewijd aan de gelijkvormige transformaties. Deze worden gedefinieerd als samenstelling van een homothetie en een orthogonale transformatie. Weer begint het hoofdstuk met een aardige stelling, die inhoudt de gelijkwaardigheid van de volgende beweringen:

t is een gelijkvormige transformatie,
t laat orthogonaliteit invariant,
t laat gelijkheid van lengten invariant,
t vermenigvuldigt elke lengte met een zelfde getal r,
t vermenigvuldigt elk scalair produkt met r^2.

Hierin is t een lineaire transformatie.

Er zijn twee soorten gelijkvormige transformaties:

a. de directe, gedefinieerd door

$\text{Sim}^+(\Pi_0) = \text{R}\,\mathcal{O}^+(\Pi_0)$, en dus met matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$,

b. de indirecte, gedefinieerd door

$\text{Sim}^-(\Pi_0) = \text{R}\,\mathcal{O}^-(\Pi_0)$, en dus met matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$.

Totnogtoe hebben we gewerkt in het niet georiënteerde vlak Π_0. We gaan dit vlak nu oriënteren. Dit doen we door uit de twee

kwart draaien er één te kiezen. De gekozen kwart draai noemen we i. Het vlak Π_0 met daarin gekozen één kwart draai, die i genoemd is, noteren we Π_{01}. We noemen Π_{01} het georiënteerde euclidische vlak.

We noemen $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ een orthonormale basis van Π_{01}, als $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ een orthonormale basis van Π_0 is en bovendien $\vec{e_2} = \mathrm{i}\, \vec{e_1}$.

We vinden nu allereerst

$\mathrm{i}^2 = -1$, volgens de definitie van een kwart draai,
$\mathrm{i}^3 = \mathrm{i} \cdot \mathrm{i}^2 = \mathrm{i} \cdot -1 = -1 \cdot \mathrm{i} = -\mathrm{i}$,
$\mathrm{i}^4 = 1$.

Verder is het nu, en niet eerder dan nu, mogelijk de sinus van een geordend vectorpaar te definiëren:

$$\sin(\vec{x}, \vec{y}) = \cos(\mathrm{i}\,\vec{x}, \vec{y}).$$

Het was mogelijk de cosinus te definiëren in een ongeoriënteerd vlak. Voor de definitie van de sinus is echter oriëntatie vereist.

Gemakkelijk laat zich bewijzen:

$\sin(r\,\vec{x}, r\,\vec{y}) = \sin(\vec{x}, \vec{y})$ (r stelt een rotatie voor),
$\sin(-\vec{x}, \vec{y}) = -\sin(\vec{x}, \vec{y})$,
$\sin(\vec{y}, \vec{x}) = -\sin(\vec{x}, \vec{y})$,
$\sin(\vec{x}, \vec{x}) = 0$.

En omdat $\sin(\vec{x}, r\,\vec{x}) = -\cos \mathrm{i}r$, definiëren we de sinus van een rotatie r als

$$\sin r = -\cos \mathrm{i}r.$$

Nu wordt, onafhankelijk van de gekozen orthonormale basis van Π_{01} de matrix van de rotatie r: $\begin{pmatrix} \cos r & \sin r \\ -\sin r & \cos r \end{pmatrix}$. Hierin is

$$r = \cos r + \mathrm{i} \sin r \qquad \text{en} \qquad \sin^2 r + \cos^2 r = 1.$$

Om de juistheid van de eerste betrekking in te zien, moeten we bedenken, dat de matrix van de homothetie $\cos r$ is $\begin{pmatrix} \cos r & 0 \\ 0 & \cos r \end{pmatrix}$, de matrix van de homothetie $\sin r$ is $\begin{pmatrix} \sin r & 0 \\ 0 & \sin r \end{pmatrix}$ en de matrix van de kwart draai i is $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Rekenen we nu de matrix van $\cos r + \mathrm{i} \sin r$ uit, dan krijgen we inderdaad de matrix van r.

De lezer heeft het al een tijd zien aankomen: we zijn hier zover gevorderd, dat we in een handomdraai de complexe getallen kunnen invoeren.

Definitie. De directe gelijkvormige transformaties van Π_{01} noemen we complexe getallen.

Nu kunnen we bewijzen:

C, +, · is een lichaam, waarvan R, +, · een deellichaam is,
$C = \{a + b\,i \mid a, b \in R\}$,
elk complex getal kan op precies één manier geschreven worden in de vorm $a + bi$,
$C = \{pr \mid p \in R^+, r \in \mathcal{O}^+(\Pi_0)\}$ [1] (immers elke gelijkvormige transformatie is samengesteld uit een homothetie en een rotatie),
elk complex getal kan op precies één manier geschreven worden in de vorm pr, met uitzondering van 0.

We noemen p de modulus en r de rotatie van het complexe getal. De rekenregels voor complexe getallen kunnen thans zonder enige moeite afgeleid worden.

Tot slot worden de hoeken ingevoerd op de manier, die gevolgd is bij het definiëren van vectoren. We gaan uit van de groep van de rotaties $\mathcal{O}^+(\Pi_0)$, o. Onderstel $\mathscr{A}$ is de een of andere verzameling en in deze verzameling is een operatie, die we + schrijven, zo gedefinieerd dat geldt

$$\mathcal{O}^+(\Pi_0),\ \circ \text{ is isomorf met } \mathscr{A},\ +,$$

dan noemen we de elementen van de verzameling $\mathscr{A}$ hoeken.

Elke bewering over rotaties kan daardoor vertaald worden in een bewering over hoeken, waarbij samenstellen vertaald moet worden door optellen. Het samenstellen van twee rotaties geschiedt door vermenigvuldiging van twee matrices van de vorm

$$\begin{pmatrix} \cos r_1 & \sin r_1 \\ -\sin r_1 & \cos r_1 \end{pmatrix} \quad \text{en} \quad \begin{pmatrix} \cos r_2 & \sin r_2 \\ -\sin r_2 & \cos r_2 \end{pmatrix}.$$

Voeren we deze vermenigvuldiging uit, dan zijn daarmee afgeleid de formules voor de cosinus en de sinus van de som van twee hoeken. We vertalen de kwart draai i per definitie door rechte hoek. De verdere goniometrische formules rollen er nu vanzelf uit.

Ter verduidelijking nog een voorbeeld. Bij de kwart draai i hoort de matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. De krachtens de isomorfie tussen $\mathcal{O}^+(\Pi_0)$ en $\mathscr{A}$ bij de kwart draai i behorende hoek heet de rechte hoek, genoteerd 1 dr.

---

[1]) R^+ is de verzameling van de reële getallen, die positief of 0 zijn.

Hieruit volgt

$$\cos 1 \text{ dr} = 0 \qquad \text{en} \qquad \sin 1 \text{ dr} = 1.$$

Verder is

$$\begin{pmatrix} \cos r & \sin r \\ -\sin r & \cos r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin r & \cos r \\ -\cos r & \sin r \end{pmatrix}.$$

Noem de met de rotatie r corresponderende hoek $\hat{r}$. We hebben dan gevonden:

$$\begin{aligned} \cos(1 \text{ dr} + \hat{r}) &= -\sin \hat{r} \\ \sin(1 \text{ dr} + \hat{r}) &= \cos \hat{r}. \end{aligned}$$

Hiermee zijn we aan het eind gekomen van een fraai document. Toch dringt zich nog een vraag op. Begonnen is met 12 axioma's. Bewezen is, dat daaruit het „enige axioma'' volgde. Is nu de meetkunde, die uit dit enige axioma afgeleid is, ekwivalent met de oorspronkelijke? Anders gezegd: kunnen we uitgaande van ons enige axioma de 12 axioma's bewijzen? Dit kan zonder twijfel en zelfs zonder veel moeite. Maar Papy stelt er geen prijs op. Van de theorie van de lineaire ruimte zegt hij op pag. V: „Cette merveilleuse machine-outil ne doit pas être utilisée à redécouvrir ce que l'on sait déjà. Elle doit permettre de nouvelles conquêtes.''

Trouwens om de oude meetkunde terug te krijgen, zouden we ons moeten verdiepen in onder meer de translaties. En deze zijn in het kader van de lineaire algebra weinig interessant, omdat het geen lineaire transformaties zijn. Vandaar, dat Papy zich ertoe beperkt te definiëren, dat een translatie een permutatie is van de vorm: $\Pi_0 \rightarrow \Pi_0 : \vec{x} \rightarrow \vec{v} + \vec{x}$ en dat rechte lijnen per definitie zijn de lineaire eendimensionale deelruimten van Π_0 (vectoriële rechten) en de verzamelingen, die daaruit door translatie ontstaan. Hierop wordt in het boek verder niet ingegaan, zodat de leerling de strekking van deze toevoeging alleen kan begrijpen, als zijn leraar hem dit duidelijk maakt.

De omvang van de tekst is 275 blz., waarvan de eerste 72 besteed zijn aan de synthetische opbouw met behulp van de 12 axioma's.

Mededeling. Verschenen is de Nederlandse vertaling van MM2. De titel luidt: Moderne Wiskunde 2. Uitgever: Didier, Brussel. Vertaald door Alfred Vermandel.

JEAN VICTOR PONCELET

Poncelet, de ontdekker van de projectieve meetkunde, is op 1 juli 1788 te Metz geboren. Na studie aan de Parijse École polytechnique (bij Monge) werd hij officier. Op 17 juni 1812 ging hij naar Rusland, waar hij op 18 november krijgsgevangene werd. Hij besloot, in Saratov, zich weer aan de studie te wijden en onder enigszins uitzonderlijke omstandigheden legde hij toen de grondslag voor zijn later werk over projectieve meetkunde. In september 1814 kwam hij terug in Metz, als kapitein. In 1822 verschijnt dan zijn bekendste werk *Traité des propriétés projectives des figures*. In 1824 werd hij professor in de mechanica aan de militaire École d'Application. Zijn werken over de toegepaste mechanica brachten hem aanvankelijk meer roem en bekendheid dan de *Traité*, die in Duitsland eerder bestudeerd werd dan in Frankrijk. In 1834 werd hij overgeplaatst naar Parijs waar hij in 1838 professor in de mechanica aan de Faculté des sciences werd. In 1848 volgde zijn benoeming tot generaal. In 1850 werd hij gepensioneerd. In 1865—1866 verzorgde hij nog een zeer vermeerderde uitgave, in 2 delen, van zijn *Traité*. Op 23 december 1867 is hij te Parijs overleden.

De eerste uitgave van de *Traité* (4°, 472 pagina's) begint met: „Préface. Cet ouvrage est le résultat des recherches que j'ai entreprises, dès le printemps de 1813 dans les prisons de la Russie...... j'avais dès lors trouvé les théorèmes fondamentaux de mon travail ...." In de „Introduction" bespreekt hij „deux moyens généraux, également puissans,... pour perfectionner la Géometrie rationelle". Het eerste is het zogenaamde continuïteitsbeginsel (principe van Poncelet) om - onder zekere voorwaarden - eigenschappen een algemenere geldigheid toe te kennen. Door een vindingrijk hanteren van dit tamelijk vaag omschreven principe (Poncelet zelf zegt ervan: „si ce n'est comme moyen de démonstration, du moins comme moyen de découverte ou d'invention?) vond hij vele nieuwe eigenschappen. Het tweede is dat der projectie en het zoeken van eigenschappen, die daarbij onveranderd blijven: „on a donc dû les distinguer de toutes les autres par le nom génerique de propriétés projectives, ..."

Het werk bestaat uit vier delen; we noemen slechts enkele punten uit de rijke inhoud. In deel I vindt men o.a. de harmonische ligging van 4 punten op één lijn en van 4 lijnen door één punt, het oneindig

verre punt op een lijn, als ook: ,,tous points a l'infini d'un plan puissent être considérés idéalement comme distribués sur une droite unique, situé elle-même à l'infini sur ce plan". Deel II bevat de volledige vierzijde en de bekende stellingen van Desargues, Pappus, Pascal en Brianchon. Deel III is gewijd aan kegelsnedenbundels. In deel IV komen o.a. ter sprake veelhoeken, om of in een kegelsnede beschreven en die aan nog een voorwaarde voldoen (bijv. in een ellips, en tevens om een andere).

Het voor de projectieve meetkunde zo belangrijke dualiteitsbeginsel is pas later door Poncelet en Gergonne (1771—1859) onafhankelijk van elkaar toegepast.

A. J. E. M. Smeur

RECREATIE

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek gelieve men te zenden aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Kneppelhoutweg 12, Oosterbeek.

187. Als een vierkante tegelvloer bestaat uit 7 maal 7 vierkante tegels, die congruent zijn, dan zal een diagonaal met het zevendedeel van alle tegels een lijnstuk gemeen hebben.

Onderstel nu, dat de tegelvloer 8 tegels breed is. Hoeveel tegels moet de vloer dan lang zijn, wil een diagonaal toch met het zevendedeel van alle tegels een lijnstuk gemeen hebben? (B. Kootstra)

188. De heer H. Cohen, een amateur wiskundige uit Israël, maakte mij opmerkzaam op het volgende spel. A neemt een getal van vier verschillende cijfers in gedachten; het mag met een 0 beginnen. B moet het getal vinden. Laten we aannemen, dat A gekozen heeft 3749. B raadt 9721. A zegt nu: 2 goed, 1 raak. Dat wil zeggen: van de vier cijfers van het getal 9721 komen er twee voor in 3749 en één van deze twee cijfers staat op de goede plaats. B kiest daarna andere getallen en laat A telkens zeggen, hoeveel cijfers goed en hoeveel raak zijn. De heer Cohen zeide er steeds na maximaal zes keer raden in te slagen het juiste getal op te geven. Of theoretisch altijd door zes keer raden het getal gevonden kan worden, weet ik niet; ik heb het vermoeden gekregen, dat het inderdaad zo is. Maar het bewijs lijkt me zeer langdurig te worden. Ter oriëntatie voor de liefhebbers de volgende opgave:

B raadt 0123; antwoord 1 goed 0 raak,

B raadt 4567; antwoord 1 goed 1 raak.

Vind nu door nog drie keer raden het getal.

Opmerking. De informatie, die men krijgt uit 1 goed 0 raak, is zo klein mogelijk. Daarentegen is de informatie, die men de tweede keer krijgt, vrij belangrijk. Vandaar dat het nu met in totaal vijf keer raden lukt het getal te vinden.

OPLOSSINGEN

1

185. Een kubus bestaat uit 27 congruente kubussen. Een houtworm vreet zich een weg van buiten naar binnen en eindigt in de binnenste kubus. Hij gaat slechts eenmaal door elke kubus. Waar kan hij begonnen zijn?

We kleuren de kubussen zwart en wit zo, dat twee aangrenzende kubussen verschillende kleur hebben; de middelste kleuren we wit. Er zijn dan 13 witte en 14 zwarte kubussen. De worm zal dan de kubussen doorlopen in een volgorde . . ., zwart, wit, zwart, wit, zwart, wit. De laatste van deze serie is wit; er zijn er 27; de eerste is dus ook wit; dus zijn er in de serie 14 witte en 13 zwarte. Dit is niet zo. En dus is het onmogelijk de kubussen op de vereiste wijze te doorvreten.

186. Iemand keert een groot aantal papiertjes stuk voor stuk om, waarop verschillende positieve reële getallen staan. Hij moet stoppen bij het grootste getal. Welke is de beste strategie en hoe groot is de optimale kans op succes?

Om zijn strategie te bepalen, zal hij eerst moeten overwegen, welke toestanden waarschijnlijk zijn. Een overweging van de aard: dit getal is al zo groot, een groter is er vast niet, is uiteraard waardeloos. Hij gaat ervan uit, dat als de papiertjes in een willekeurige volgorde omgekeerd worden, elke onderlinge ordening van de getallen naar grootte even waarschijnlijk is. Noem de getallen in volgorde van grootte $g_1, g_2, \ldots, g_n$; elke permutatie van deze getallen bij het omkeren is even waarschijnlijk.

Hij zal nu van te voren moeten bepalen, dat hij een bepaald aantal (k) van de papiertjes in elk geval omkeert en niet tot grootste verklaart. Daarna gaat hij door tot het eerstvolgende getal, dat groter is dan de eerste k getallen. Vindt hij geen dergelijk getal, dan is het hem dus niet gelukt bij het grootste getal te stoppen. De vraag is nu k te bepalen.

Als $n = 3$, dan kan men kiezen $k = 1$ en $k = 2$. In het eerste geval vindt men voor de kans van slagen $p = \frac{1}{2}$; in het tweede geval $p = \frac{1}{3}$. Men kiest dus $k = 1$.

Als $n = 4$, dan krijgen we:

$$k = 1 \rightarrow p = \frac{11}{24};\ k = 2 \rightarrow p = \frac{5}{12};\ k = 3 \rightarrow p = \frac{1}{4}.$$

Men kiest dus $k = 1$. Om de juistheid van deze getallen te controleren, kan men eventueel alle 24 permutaties van $g_1, \ldots, g_4$ opschrijven.

Nu algemeen. Kies eerst k papiertjes. Noem de afgelezen getallen in opklimmende volgorde $h_1, h_2, \ldots, h_k$. Op hoeveel manieren kunnen we nu de latere getallen gerangschikt zijn, wil men een positief resultaat bereiken?

Eerste mogelijkheid. Het $k + 1^e$ getal is groter dan h_k. Noem het h_{k+1}. Het $k + 2^e$ getal mag dan zijn: kleiner dan h_1, tussen h_1 en h_2, tussen h_2 en $h_3, \ldots$, tussen h_k en h_{k+1}. Echter niet groter dan h_{k+1}, want dan heeft onze strategie gefaald. Het $k + 2^e$ getal kan dus op $k + 1$ manieren gekozen worden.

Voor het $k + 3^e$ getal bestaat nu als enig gebod, dat het niet groter mag zijn dan h_{k+1}. Het kan dus op $k + 2$ manieren gekozen worden. Evenzo kan het $k + 4^e$ getal op $k + 3$ manieren gekozen worden. Enz.

In totaal vinden we zo:

$$1 \,.\, (k+1)(k+2) \ldots (n-1) \text{ manieren.}$$

Tweede mogelijkheid. Het $k + 1^e$ getal is kleiner dan h_k en kan dus op k manieren gekozen worden. Het $k + 2^e$ getal is groter dan h_k. De volgende getallen zijn kleiner dan het $k + 2^e$ en kunnen dus gekozen worden op resp. $k + 2,\ k + 3, \ldots, n - 1$ manieren.

In totaal vinden we zo

$$k \,.\, 1 \,.\, (k + 2) \ldots (n - 1) \text{ manieren.}$$

Derde mogelijkheid. Het $k + 1^e$ en het $k + 2^e$ getal zijn kleiner dan h_k, het $k + 3^e$ is groter. Dit levert

$$k(k + 1) \,.\, 1 \ldots (n - 1) \text{ manieren.}$$

Enzovoorts.

Het totaal aantal manieren is dus alles bij elkaar genomen:

$$k(k+1)(k+2)\dots(n-1)\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\dots+\frac{1}{n-1}\right).$$

Dit zijn dus uitsluitend de succesvolle manieren. Het totaal aantal manieren waarop de getallen na het k^e getal überhaupt gekozen kunnen worden, bedraagt

$$(k+1)(k+2)\dots(n-1)n.$$

Zodat de kans op succes bedraagt

$$\frac{k}{n}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}+\dots+\frac{1}{n+1}\right). \tag{1}$$

Het is nu dus de kunst k zo te kiezen, dat deze kans optimaal wordt. Om dit probleem op te lossen, gaan we na, wat er gebeurt, als k met 1 vermeerderd wordt. Dan wordt (1) vermeerderd met

$$\frac{1}{n}\left(\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\dots+\frac{1}{n-1}-1\right).$$

We moeten nu nagaan voor welke waarde van k dit voor het laatst positief is. Deze waarde van k noemen we k_0. Dan is voor grote n

$$\frac{1}{k_0+1}+\frac{1}{k_0+2}+\dots+\frac{1}{n-1}\approx 1. \tag{2}$$

Nu is het linker lid hiervan te schrijven

$$\frac{1}{k_0+1}\cdot 1+\frac{1}{k_0+2}\cdot 1+\dots+\frac{1}{n-1}\cdot 1.$$

Deze bovensom kunnen we benaderen door de riemann-integraal

$$\int_{k_0}^{n}\frac{1}{x}\,dx.$$

Deze integraal is gelijk aan $\ln n - \ln k_0$. Zodat we vinden

$$\ln n - \ln k_0 \approx 1,$$
$$k_0 \approx n/e. \tag{3}$$

De optimale kans vinden we nu uit (1). Wegens (2) en (3) kunnen we hiervoor schrijven

$$\frac{n/e}{n}\left(\frac{1}{n/e}+1\right)\approx e^{-1}.$$

Een onverwacht resultaat!

Ad 184. Verschillende lezers hebben gereageerd op de vraag, of er sommen van opvolgende kwadraten met meer dan 2 termen te vinden zijn, die weer gelijk aan een kwadraat zijn. De eenvoudigste blijken 11 termen te hebben. Men vindt dan

$$18^2+\dots+28^2=77^2 \text{ en } 38^2+\dots+48^2=143^2.$$

Verder vonden sommigen

$$1^2+\dots+24^2=70^2,\ 9^2+\dots+32^2=106^2 \text{ en } 25^2+\dots+48^2=192^2.$$

Meer over het probleem kan men vinden in: *Mathematics Magazine* 37, 1964, p. 19-32 in een artikel van Brother U. Alfred.

WIMECOS

AGENDA van de ALGEMENE VERGADERING van de Vereniging van leraren in de wiskunde, de mechanica en de cosmografie (WIMECOS) op donderdag 28 december 1967 in „ESPLANADE", Lucas Bolwerk, Utrecht. Aanvang 10.30 uur.

1 Opening door de voorzitter, Dr. Ir. B. Groeneveld.
2 Notulen van de algemene vergadering van 28 december 1966*.
3 Jaarverslagen:
3.1 van de secretaris*;
3.2 van de penningmeester;
3.3 van de kascommissie*;
3.4 van de redactie van „Euclides"*;
3.5 van de commissie voor de leesportefeuille*.
4 Décharge van de penningmeester en benoeming van de nieuwe kascommissie.
5 Bestuursverkiezing wegens aftreden van de heer C. van Vliet. Het bestuur steld kandidaat de heer M. Kindt uit Wageningen.
6 Bespreking van het bestuursvoorstel de contributie voor het verenigingsjaar 1968—1969 vast te stellen op f 9,—.
7 Voordracht van Prof. Dr. J. J. Seidel, hoogleraar aan de Technische Hogeschool van Eindhoven over „*Discrete meetkunde*".

PAUZE

In de middagvergadering, die om ongeveer 14.15 uur begint:

8 Voordracht van de heer A. Engel, Oberstudienrat, Stuttgart-Rohr, over „*Systematische Verwendung der Anwendungen in Mathematikunterricht*".
9 Rondvraag.
10 Sluiting.

* Zie elders in dit nummer.

NOTULEN VAN DE ALGEMENE VERGADERING VAN WIMECOS

28 december 1966 in „Esplanade", Utrecht.

Om 10.35 opent de voorzitter, dr. ir. Groeneveld, de vergadering. Hij heet de aanwezigen welkom, in het bijzonder de ereleden dr. J. H. Wansink en P. Wijdenes, de inspecteurs dr. D. N. van der Neut en drs. B. J. Westerhof, de vertegenwoordigers van zusterorganisaties, dr. Th. Korthagen (Liwenagel), drs. A. J. G. Bartels (Velines), drs. H. C. Vernout (WVO), de redactiesecretaris van „Euclides", drs. A. M. Koldijk, de sprekers prof. dr. J. H. de Boer en W. J. Kniep.

Bericht van verhindering was binnengekomen van de ereleden, prof. dr. O. Bottema en drs. A. J. S. van Dam, van dr. J. B. Drewes, raadadviseur in algemene dienst, dr. P. J. Gathier chef van de hoofdafdeling VHMO, van de inspecteurs, dr. W. H. Capel en dr. H. A. Gribnau, en van Velibi.

De presentielijst is door 72 aanwezigen getekend.

De jaarrede van de voorzitter zal in Euclides worden gepubliceerd, aan het slot van zijn rede neemt de voorzitter afscheid van drs. J. H. Hufferman, die twaalf jaar bestuurslid is geweest; hij dankt de scheidende functionaris voor zijn hartelijkheid, zijn wijze adviezen en het vele werk dat hij vooral in de negen jaren van zijn secretariaat voor Wimecos heeft verricht.

De notulen van de jaarvergadering van 28 december 1965 worden goedgekeurd.

Evenzo de jaarverslagen van de secretaris, de kascommissie, de redactie van ,,Euclides" en de commissie voor de leesportefeuille; n.a.v. het laatstgenoemde jaarverslag deelt de voorzitter mee dat het bestuur de tekorten zal dekken, die door de verhoogde circulatiekosten zullen ontstaan.

De penningmeester geeft een toelichting bij het overzicht van de uitgaven en inkomsten van het verenigingsjaar 1965—1966. Naar aanleiding hiervan stelt dr. P. G. J. Vredenduin voor, de naam van het Fonds ,,250 Opgaven" te wijzigen in ,,Wimecosuitgaven"; dit voorstel wordt aangenomen.

De penningmeester wordt décharge verleend; in de nieuwe Kascommissie worden benoemd drs. M. S. R. Nihon en drs. N. A. A. van Niekerk.

De periodiek aftredende bestuursleden dr. ir. B. Groeneveld en drs. A. J. Th Maassen worden herkozen.

De contributie voor het verenigingsjaar 1967—1968 wordt vastgesteld op f 9,—.

Hierna geeft de voorzitter het woord aan de inspecteur dr. D. N. van der Neut. Deze deelt mee dat onlangs een interimrapport is aangeboden aan de Staatssecretaris door de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde; en dat discussienota's zullen worden opgesteld over de brugklas, onderbouw wvo, onderbouw havo, bovenbouw vwo en bovenbouw havo; dat de commissie een positief antwoord heeft gekregen op haar verzoek het rapport en de nota's te mogen publiceren en dat publicatie in brochure-vorm zal geschieden. De heer Van der Neut hoopt op uitvoerige discussies over het voorgestelde leerplan onder de wiskundeleraren en wekt alle aanwezigen op veel aandacht aan rapport en nota's te besteden.

Hierna krijgt de heer C. J. Alders het woord om een technische mededeling te doen over het wintersymposion van het Wiskundig Genootschap van 3 januari 1967.

De voorzitter deelt mee, dat namens de vergadering een telegram zal worden gezonden aan prof. dr. O. Bottema, die voor een operatie in het ziekenhuis verblijft. In de middagvergadering kan de voorzitter tot zijn vreugde meedelen dat de heer Bottema inmiddels uit het ziekenhuis ontslagen is en dat het hem goed gaat.

Na een kleine onderbreking voor de koffie, geeft de voorzitter het woord aan prof. dr. J. H. de Boer; diens voordracht over ,,*Eliminatie*" zal in ,,Euclides" worden gepubliceerd.

Na de dankwoorden van de voorzitter aan de spreker en nadat de spreker enkele vragen heeft beantwoord, schorst de voorzitter, om 12.35, de vergadering.

Om 14.20 wordt de vergadering hervat; de voorzitter heet de inspecteur bij de organisatie der studies, belast met de hervorming van het onderwijs in België, dr. J. J. van Hercke, hartelijk welkom en geeft het woord aan de heer W. J. Kniep die spreekt over ,,*De Schotse methode van het wiskunde-onderwijs*"; deze voordracht zal in ,,Euclides" worden gepubliceerd.

Nadat de voorzitter de spreker heeft bedankt, worden aan de heer Kniep enkele vragen gesteld en door hem beantwoord.

Bij de rondvraag dankt de inspecteur drs. B. J. Westerhof mede namens zijn collega, dr. D. N. van der Neut, voor de uitnodiging tot bijwoning van deze jaarvergadering; hij verzekert, het kontakt tussen de inspectie en de wiskundedocenten zeer op prijs te stellen; hij complimenteert het bestuur met de keuze van de sprekers en de voordrachten.

De heer drs. A. J. C. Bartels dankt mede namens de vertegenwoordigers van WVO en Liwenagel voor de ondervonden gastvrijheid.

De heer drs. J. F. Hufferman dankt voor de vriendelijke woorden van de voorzitter en voor de vriendschap die hij in het bestuur heeft ondervonden; hij wenst Wimecos alle goeds toe.

De heer L. van der Brom vraagt of afschaffing van het standaard-eindexamen niet in overweging moet worden genomen, en of de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde er niet verstandig aan zou doen competente mensen aan te trekken die zich volledig aan de modernisering van het wiskunde-onderwijs kunnen wijden.

Nadat de voorzitter hem is bijgevallen, geeft hij het woord aan de inspecteur dr. D. N. van der Neut. Deze verklaart dat de Commissie opmerkingen als van de heer L. van der Brom op prijs stelt, maar dat zij als adviescommiessie van de minister niet naar buiten kan treden; dat ook de Commissie denkt aan instelling van een permanent bureau met wetenschappelijke ambtenaren, en dat differentiatie van eindexamens bij de Commissie in overweging is.

Om 16.25 sluit de voorzitter de vergadering na de aanwezigen voor hun belangstelling te hebben bedankt.

VERSLAG VAN HET VERENIGINGSJAAR

1 september 1966—31 augustus 1967

De vereniging telde op 31 augustus 1967 679 leden.

De ledenwervingsactie die op de scheiding van dit en het volgende verenigingsjaar werd gevoerd, heeft als resultaat een stijging van het ledental met 109.

Het bestuur was in dit jaar als volgt samengesteld: dr. ir. B. Groeneveld, voorzitter; drs. A. J. Th. Maassen, secretaris; drs. J. van Dormolen, penningmeester; C. J. Alders; ir. C. van Vliet; dr. P. G. J. Vredenduin.

Op 2 november 1966 heeft een Symposion plaats gehad in de Technische Hogeschool Twente; het thema van dit symposion was de opleiding en de campussamenleving van de THT.

Op 12 november heeft het bestuur van Wimecos zijn kritiek op het Interimrapport van de Commissie Opleiding Leraren aan de Raad van Leraren kenbaar gemaakt; op 5 mei 1967 heeft het bestuur aan de genoemde commissie laten weten, geen lid van zijn vereniging te kunnen verzoeken namens Wimecos zitting te nemen in de commissie voor de opstelling van het programma van de wetenschappelijke opleiding wiskundeleraren; dit na uitvoerig beraad met de Raad van Leraren.

De jaarvergadering werd gehouden op woensdag 28 december in „Esplanade", Utrecht; sprekers waren prof. dr. J. H. de Boer en de heer W. J. Kniep. Tijdens deze vergadering werden de heren Groeneveld en Maassen herkozen als bestuurslid.

Het Wimecosbestuur heeft in de vergadering van 28 december 1966 besloten, de tekorten van de Leesportefeuille ten gevolge van de verhoging der circulatiekosten aan te vullen.

In augustus 1967 werd een circulaire verzonden aan alle wiskundeleraren van Nederlandse scholen voor vhmo over de vergadering in de herfstvacantie 1967 ter bespreking van de discussienota's die opgesteld zijn n.a.v. het Interimrapport van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde.
De heren Groeneveld en Van Vliet hebben Wimecos vertegenwoordigd in een werkgroep ter voorbereiding van het havo-wiskundeprogramma.

De vereniging heeft zich verschillende malen doen vertegenwoordigen op vergaderingen van zusterverenigingen en in commissievergaderingen.

Het bestuur heeft in dit jaar zesmaal vergaderd.

VERSLAG VAN DE KASCOMMISSIE

Aan de ledenvergadering van de
vereniging Wimecos.

Ondergetekenden, M. S. R. Nihom en N. A. A. van Niekerk, verklaren dat zij op 10 oktober 1967 de boeken van de penningmeester, J. van Dormolen, hebben gecontroleerd en in orde bevonden.

Zij spreken hun waardering uit over de efficiënte wijze waarop de boekhouding van Wimecos wordt gevoerd en stellen de vergadering voor, de penningmeester décharge te verlenen over het in het afgelopen verenigingsjaar gevoerde beleid.

Oegstgeest, 10 oktober 1967 w.g. M. S. R. Nihom
N. A. A. van Niekerk

JAARVERSLAG 1966/67 VAN DE TIJDSCHRIFTENCIRCULATIE WIMECOS

Momenteel lezen 32 leden de Wimecos-portefeuille. Zij betaalden f 277,— abonnementsgelden (tegen f 310,— in het jaar '65/'66).

In aanschaffing van de tijdschriften kostte f 360,— (verleden jaar f 204,—) een flinke verhoging dus door het wederom toezenden van de Semesterbericht (f 87,—) en het dubbele abonnement op de Math. Teacher (f 63,—).

Daarmee komen de totale uitgaven op f 475,— wat een nadelig saldo betekent van f 200,—, hetgeen, door een extra uitkering van f 100,— in de loop van dit jaar, werd teruggebracht tot f 100,—.

Klachten over onregelmatige toezending der tijdschriften blijven binnenkomen, maar daaraan zijn de vakanties schuld.

Alle tijdschriften zijn nu in de circulatie — ook de Semesterberichten — en dat stemt, na de wat sombere financiële berichten, tot tevredenheid.

Roosendaal, november 1967 G. J. J. Boost

REDACTIEVERSLAG 42e JAARGANG VAN EUCLIDES

Aan de besturen van
Wimecos, Liwenagel en de
Wiskunde-werkgroep van de WVO

Het aantal bijdragen inzake de didactiek van een gemoderniseerd wiskundeonderwijs dat is binnengekomen, is geringer gebleven, dan we een jaar geleden meenden te mogen verwachten. Enige inzenders van bijdragen moesten we helaas teleurstellen, omdat ze hun artikelen zo laat inzonden, dat plaatsing in het door hen uitdrukkelijk gewenste nummer van Euclides niet meer mogelijk bleek. Wel konden enige suggesties ten aanzien van te behandelen stof worden gevolgd.

Het was te verwachten, dat het Interimrapport van de Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde met de toegevoegde discussienota's aanleiding zouden geven tot tal van bijdragen van de zijde van de leraren. De gang van zaken heeft er echter toe geleid, dat de bij de lezers bestaande wensen inzake de nieuwe programma's alleen aan de samenwerkende verenigingen zijn toegezonden en dat het niet mogelijk was om na de verschijning van de Discussienota's nog via Euclides positieve bijdragen te leveren voor de totstandkoming van de nieuwe programma's.

Wel spreken we de wens uit, dat er aan de interpretatie en didactische verwerking

van de nieuwe leerstof door artikelen in Euclides — ook en vooral van de lezers zelf — zal worden bijgedragen.

Jaargang 42 telde weer 320 bladzijden verdeeld over 10 nummers.

De samenwerking met de uitgever was goed; helaas ondervond de verschijning van sommige nummers enige vertraging.

De samenstelling van de redactie bleef ongewijzigd.

21 oktober 1967

Namens de redactie,
J. H. Wansink, voorzitter
A. M. Koldijk, secretaris

BOEKBESPREKING

Dr. W. J. Bos, *Grondslag voor meetkunde 3*, J. M. Meulenhoff, Amsterdam, f 6,25.

In het voorwoord deelt de auteur mee, dat hij zich aan het oude leerplan heeft gehouden, omdat het nieuwe nog niet vaststaat. De inhoud komt nagenoeg overeen met *Wegwijzer* 3 met uitzondering van de constructies, waarbij de nadruk gelegd is op de constructie als existentiebewijs.

Het boek is prijzenswaardig beknopt; er is volop gelegenheid de leerling zelf wat te laten vinden, zowel bij de opbouw der theorie als bij de vraagstukken. Die vraagstukken hebben voor een zeer groot deel gegevens in de figuurvorm met vraagtekens bij de onbekende. De verscheidenheid wordt daardoor bijzonder groot; ook de variatie in moeilijkheid is opvallend. Mijn bezwaren tegen deze sommen blijven; de leerling moet m.i. ook in staat zijn bij gegeven tekst de figuur zelf te tekenen. Opvallend zijn de „liggingsproblemen", d.i. een systematische behandeling van problemen als „hoe bewijst men dat 3 lijnen door één punt gaan" of „hoe bewijst men dat twee lijnen evenwijdig zijn"? Ik kan hiervoor voelen, al vraag ik mij af of bij dit boek —waarin zoveel berekeningsvraagstukken staan— Ceva geen kans had moeten hebben bij de behandeling van het eerstgenoemde probleem. De regelmatige 10-hoek mag van mij verdwijnen. De constructies als existentiebewijs voeren tot de definitie:

„Bestaan" betekent in de meetkunde „geconstrueerd kunnen worden", uiteraard met gebruikmaking alleen van passer en liniaal.

Men kan dat zo doen. Ik vraag me af, of de leerling geen verschil zal voelen tussen de onbestaanbaarheid van een driehoek met twee stompe hoeken en de onbestaanbaarheid van de trisectrices van een hoek. Helemaal bevredigend vind ik het niet.

Het is verder een uitstekende afsluiting van de meetkunde, vooral omdat al doende, de hoofdzaak der planimetrie —de tweede klas HBS-stof— prachtig wordt gerepeteerd. De uitgave en de typografische verzorging zijn uitstekend; dat geldt ook voor de ongenummerde figuren.

Groenman

WISKUNDIG GENOOTSCHAP

Het *wintersymposium* zal ditmaal gehouden worden op woensdag 3 januari 1968 in het Thomas à Kempislyceum, Thomas à Kempislaan 25 te Arnhem.

Het thema, *grafentheorie*, zal belicht worden door 3 sprekers, waaronder Prof. dr. J. H. van Lint (T. H. Eindhoven).

Deze bijeenkomst is in de eerste plaats bestemd voor leraren; overige belangstellenden zijn van harte welkom. Degenen die aan de gemeenschappelijke lunch wensen deel te nemen, wordt verzocht vóór 27 dec. 1967 een bedrag van f 4,— over te maken op girorekeningnummer 949758 ten name van Dr. P. C. S. van Oosten, Arnhem. De bijeenkomst vangt aan te 10.30 uur. Een gedetailleerd rooster volgt nog.